

11

Тема 1.

Границя та неперервність функції

Урок 19. Властивості границь функції при $x \rightarrow \infty$

Тип уроку: урок застосування знань.

План уроку

1. Графічна ілюстрація границь функції, за умови, що $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$.
2. Означення границь функції, за умови, що $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$.
3. Властивості границь функції при $x \rightarrow \infty$. Границя суми, добутку, частки функцій.
4. Практичне застосування властивостей границь функцій при $x \rightarrow +\infty$.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

визначає межі даних, формулює припущення щодо даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.3–1 П];

виявляє ініціативу, пропонує та обґрунтовує ідеї щодо способу розв'язання специфічних проблемних ситуацій [12 МАО 2.2.1–1 П];

обирає математичну модель розв'язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов [12 МАО 3.2.2–1 П];

аналізує результати дій із математичними об'єктами у процесі розв'язання проблемної ситуації [12 МАО 4.2.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.

6) Обов'язково пропонуйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Робота над обраним проєктом може тривати впродовж вивчення (повторення) усієї змістової теми. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С.

10) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чи може функція нескінченно зростати, але так і не перевищити певне число?

2) Чи можна за допомогою границь описати довготривалу поведінку процесу (економічного, фізичного, технічного)?

3) Чому іноді в реальних задачах часто важливе не точне значення, а те, до чого прямує величина з часом?

4) Навіщо потрібне строге означення границі, якщо усе можна побачити на графіку?

5) Навіщо вводити поняття границі на нескінченності, якщо нескінченність це не число?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Знайдіть границю послідовності $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3+n-n^2}{2n^2-1} \right)^3$.

Відповідь. $-\frac{1}{8}$.

2. Знайдіть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{3x}$.

Відповідь. $\frac{1}{3}$.

3. Чи має границю послідовність 1, 4, 9, 16, 25, ... ?

Відповідь. Ні.

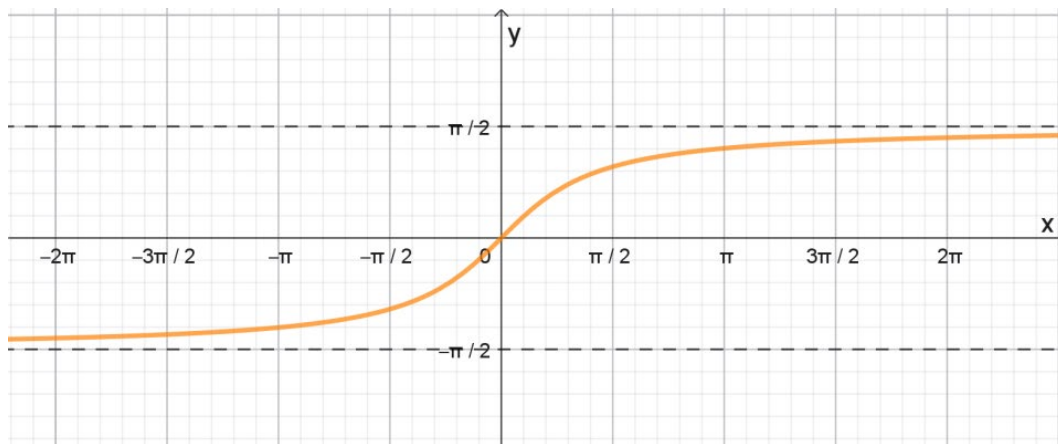
4. Обчисліть границю суму нескінченної спадної геометричної прогресії $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$
Відповідь. 2.
5. Чому дорівнює границя добутку нескінченно малої послідовності і обмеженої послідовності?
Відповідь. 0.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Продуктивність системи при навантаженні x (умовні одиниці) оцінюють двома різними аналітичними моделями. Перша модель враховує базову пропускну здатність і додаткові втрати: $P_1(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 + 5x}$. Друга модель описує спрощену оцінку ефективності системи: $P_2(x) = \frac{2x}{x + 1}$. Різниця між оцінками продуктивності визначається функцією $D(x) = P_1(x) - P_2(x)$. Знайдіть $\lim_{x \rightarrow +\infty} D(x)$ та використовуючи властивості границь, поясніть, чому кожен з моделей можна замінити простішою при великих x .

III. Графічна ілюстрація границь функції за умови, що $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$

Розглянемо графік функції $y = \arctg x$ (див. рисунок).



Якщо обрати довільну необмежено зростаючу послідовність x_n аргументів цієї функції, то відповідна їй послідовність $\arctg(x_n)$ буде прямувати до числа $\frac{\pi}{2}$.

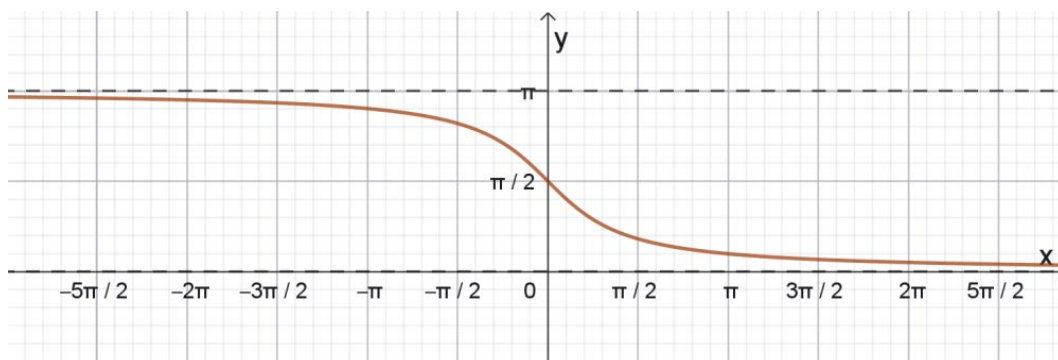
У такому випадку говорять, що число $\frac{\pi}{2}$ є границею функції $y = \arctg x$ при $x \rightarrow +\infty$.

Цей факт записують так: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}$.

Також, по аналогії, можна сказати, що $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x = -\frac{\pi}{2}$.

Ілюстративні приклади (3–5 хв)

6. Користуючись рисунком установіть чому дорівнюють $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x$ та $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x$.



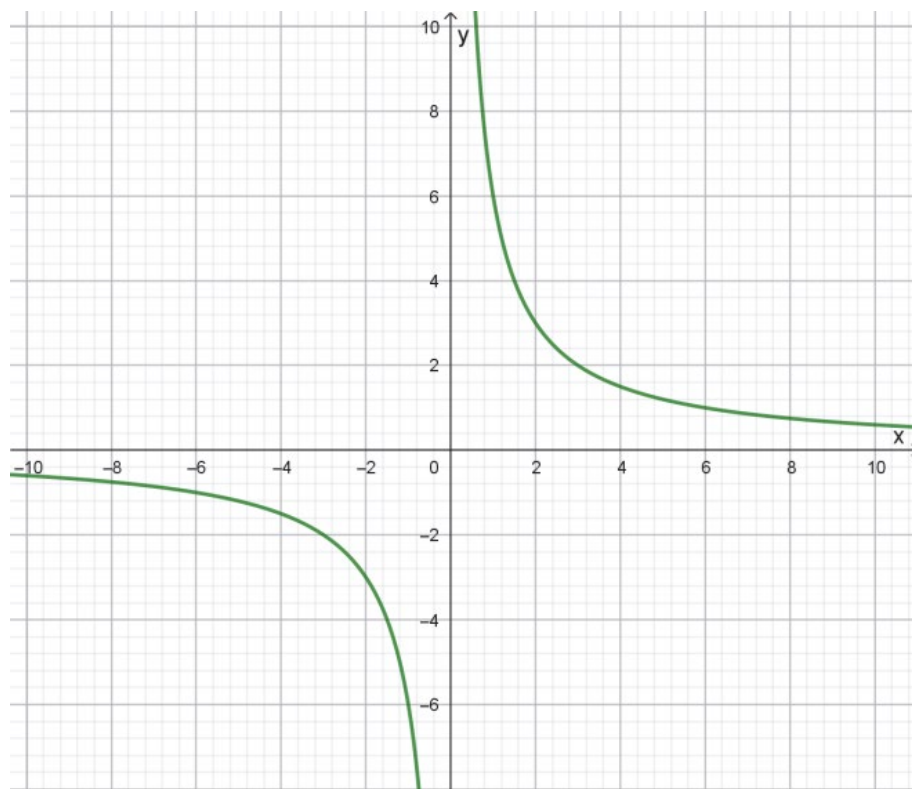
Розв'язання. Виберемо довільну необмежено зростаючу послідовність x_n аргументів функції $f(x) = \operatorname{arctg} x$, відповідна їй послідовність $\operatorname{arctg}(x_n)$ буде прямувати до числа 0, тому $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = 0$.

Для довільної необмежено спадної послідовності x_n аргументів функції $f(x) = \operatorname{arctg} x$, відповідна їй послідовність $\operatorname{arctg}(x_n)$ буде прямувати до числа π , тому $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = \pi$.

Відповідь. 0; π .

7. Побудуйте графік функції $y = \frac{6}{x}$ та за графіком встановіть значення $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x}$ та $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{x}$.

Розв'язання.



Виберемо довільну необмежено зростаючу послідовність x_n аргументів функції $y = \frac{6}{x}$, відповідна їй послідовність значень функції буде прямувати до числа 0, тому $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x} = 0$.

Аналогічно для довільної необмежено спадної послідовності x_n аргументів функції $y = \frac{6}{x}$ відповідна їй послідовність значень функції теж буде прямувати до числа 0, тому $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{x} = 0$.

Відповідь. 0; 0.

IV. Означення границь функції за умови, що $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$

Якщо для довільного додатного числа C знайдеться такий номер n_0 , що для всіх $n \geq n_0$ виконуються нерівність $a_n > C$, тобто члени послідовності a_n , починаючи з деякого номера, стають більшими за будь-яке наперед задане додатне число. У такому випадку пишуть: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

Аналогічно, якщо для довільного від'ємного числа C знайдеться такий номер n_0 , що для всіх $n \geq n_0$ виконується нерівність $a_n < C$, тобто члени послідовності a_n , починаючи з деякого номера, стають меншими від будь-якого наперед заданого від'ємного числа. У такому випадку пишуть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Примітка. Запис $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ чи $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ не означає, що послідовність a_n має границю.

Тепер уведемо означення границі функції на нескінченності.

Означення 1. Число a називають **границею функції** f при $x \rightarrow +\infty$, якщо для будь-якої послідовності x_n значень аргументу функції f такої, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, відповідна послідовність $f(x_n)$ значень функції збігається до числа a .

Пишуть $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$.

Означення 2. Число a називають **границею функції** f при $x \rightarrow -\infty$, якщо для будь-якої послідовності x_n значень аргументу функції f такої, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, відповідна послідовність $f(x_n)$ значень функції збігається до числа a .

Пишуть $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$.

Якщо $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$, то пишуть: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$.

Також, якщо $a_n \neq 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то з умови $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ або з умови $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$

випливає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

Ілюстративні приклади (5 хв)

8. Доведіть, що $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$.

Доведення. Доведемо, що для будь-якого $C > 0$ знайдеться такий номер n_0 члена послідовності, що для всіх $n \geq n_0$ виконується нерівність $n^2 > C$.

Оскільки $n > \sqrt{C}$, то покладемо $n_0 = \left[\sqrt{C} \right] + 1$ і тому для будь-якого додатного числа C для всіх $n \geq n_0$ виконується нерівність $n^2 > C$, що й треба було довести.

9. Доведіть, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3}{n + 1} = +\infty$.

Доведення. Доведемо, що для будь-якого $C > 0$ знайдеться такий номер n_0 члена послідовності, що для всіх $n \geq n_0$ виконується нерівність $\frac{2n^2 + 3}{n + 1} > C$.

Оскільки $\frac{2n^2 + 3}{n + 1} > \frac{2n^2}{n + 1} > \frac{2n^2}{n} = 2n$, то покладемо $n_0 = \left[\frac{C}{2} \right] + 1$ і тому для будь-якого додатного числа C для всіх $n \geq n_0$ виконується нерівність $\frac{2n^2 + 3}{n + 1} > C$, що й треба було довести.

10. Користуючись означенням доведіть, що $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Доведення. Нехай x_n — довільна послідовність значень аргументу функції $f(x) = \frac{1}{x}$

така, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. Тоді послідовність $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}, \dots$ є нескінченно малою, тоб-

то $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$. Це означає, що $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Що й треба було довести.

V. Властивості границь функції при $x \rightarrow \infty$

Границі функції на нескінченності притаманні властивості, аналогічні властивостям границі функції в точці. Нехай функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ мають спільну область визначення.

Якщо $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = b$, то:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = a + b$;

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)g(x)) = ab$;

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$ за умови, що $b \neq 0$.

Доведення цих властивостей пропонуємо самостійно.

Ілюстративні приклади (5–7 хв)

11. Доведіть, що коли функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ мають спільну область визначення і $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = b$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = a + b$.

Доведення. Нехай x_n — довільна необмежено зростаюча чи необмежено спадна послідовність значень аргументу функцій f і g . Тоді відповідні послідовності $f(x_n)$ і $g(x_n)$ значень функцій є збіжними до чисел a і b відповідно. За теоремою про границю суми збіжних числових послідовностей, послідовність $f(x_n) + g(x_n)$ також є збіжною, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) + g(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = a + b$.

Оскільки послідовність x_n було вибрано довільно, то це означає, що $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$.

- 12.** Доведіть, що коли функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ мають спільну область визначення і $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = b$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)g(x)) = ab$.

Доведення. Нехай x_n — довільна необмежено зростаюча чи необмежено спадна послідовність значень аргументу функцій f і g . Тоді відповідні послідовності $f(x_n)$ і $g(x_n)$ значень функцій є збіжними до чисел a і b відповідно. За теоремою про границю добутку збіжних числових послідовностей, послідовність $f(x_n)g(x_n)$ також є збіжною, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n)g(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = a \cdot b$.

Оскільки послідовність x_n було вибрано довільно, то це означає, що $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$.

- 13.** Доведіть, що коли функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ мають спільну область визначення і $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = b$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$ за умови, що $b \neq 0$.

Доведення. Нехай x_n — довільна необмежено зростаюча чи необмежено спадна послідовність значень аргументу функцій f і g . Тоді відповідні послідовності $f(x_n)$ і $g(x_n)$ значень функцій є збіжними до чисел a і b відповідно. За теоремою про границю частки збіжних числових послідовностей, послідовність $\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ також

є збіжною, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n)} = \frac{a}{b}$. Оскільки послідовність x_n було ви-

брано довільно, то це означає, що $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)}$.

VI. Практичне застосування властивостей границь функцій при $x \rightarrow +\infty$

Процес знаходження границь функцій із застосуванням властивостей на нескінченності багато в чому схожий на процес знаходження границь числових послідовностей. Проілюструємо це прикладами.

Ілюстративні приклади (5 хв)

14. Обчисліть $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x-1}$.

Розв'язання.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}} = \frac{2+0}{1-0} = 2.$$

Відповідь. 2.

15. Обчисліть $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x^2 + 1}{1 + 3x - x^3}$.

Розв'язання.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x^2 + 1}{1 + 3x - x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^2} - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2} - \lim_{x \rightarrow \infty} 1} = \frac{2-0+0}{0+0-1} = -2.$$

Відповідь. -2.

16. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}$, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$.

Розв'язання. Винесемо за дужки в чисельнику x^n , а в знаменнику x^m . Отримуємо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{n-m} \cdot \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_m}{x^m}}.$$

Границя другого множника дорівнює $\frac{a_0}{b_0}$ і відрізняється від нуля. Якщо $n > m$, то

$x^{n-m} \rightarrow \infty$, тобто шукана границя дорівнює нескінченності. Якщо $n = m$, то

$x^{n-m} = x^0 = 1$, шукана границя дорівнює $\frac{a_0}{b_0}$. Якщо $n < m$, то $x^{n-m} = \frac{1}{x^{m-n}} \rightarrow 0$. Тоді

шукана границя дорівнює нулю.

Відповідь. ∞ при $n > m$; $\frac{a_0}{b_0}$, при $n = m$; 0, при $n < m$.

17. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$.

Розв'язання.
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Відповідь. $\frac{1}{2}$.

VII. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–6 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Продуктивність системи при навантаженні x (умовні одиниці) оцінюють двома різними аналітичними моделями. Перша модель враховує базову пропускну здатність і додаткові втрати: $P_1(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 + 5x}$. Друга модель описує спрощену оцінку ефективності системи: $P_2(x) = \frac{2x}{x + 1}$. Різниця між оцінками продуктивності виражається функцією $D(x) = P_1(x) - P_2(x)$. Знайдіть $\lim_{x \rightarrow +\infty} D(x)$ та використовуючи властивості границь, поясніть, чому кожен з моделей можна замінити простішою при великих x .

Розв'язання.
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} D(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (P_1(x) - P_2(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 + 5x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x + 1} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{5}{x}} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x}} - \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 2}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}} = \frac{3 + 0}{1 + 0} - \frac{2}{1 + 0} = 3 - 2 = 1.$$

Оскільки $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_1(x) = 3$, а $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_2(x) = 3$, то при достатньо великих x задані моделі можна замінити так $P_1(x) \approx 3$, $P_2(x) \approx 2$.

Відповідь. 1.

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (7–10 хв)

Рівень А

1. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 1}{x - 2}$:

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x + 3}$.

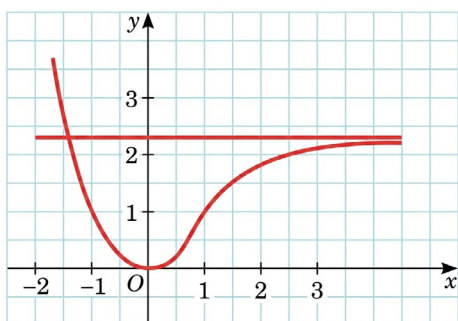
2. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{x^2 + 5x + 10}$;

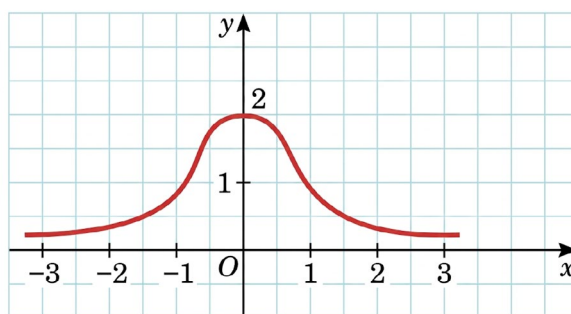
2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 1}$.

3. Знайдіть границю при $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ функції, графік якої зображено на рисунку:

1)



2)



4. Відомо, що $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -3$, $\lim_{n \rightarrow \infty} h(x) = 9$, обчисліть границі:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x) - h(x))$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (g(x) - f(x) + h(x))$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (g(x) \cdot (f(x))^2)$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(x) \cdot h(x))$.

5. Обчисліть границю:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right)$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x^2} + \frac{8}{x^3} \right)$.

6. Обчисліть границю:

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 1})$.

Рівень В

1. Обчисліть границю:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 1}{3x^5 + 2x^3 - 1}$.

2. Обчисліть границю:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 2}{3x^4 - 7x + 1}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2x + 10}{5x^2 + 3x - 1}$.

3. Побудуйте графік якої-небудь функції, що задовольняє умовам:

- 1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$ та $f(x) \geq 0$ на відрізку $[-7; 3]$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ та $f(x) > 0$ на проміжку $[0, +\infty)$.

4. Відомо, що $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -2$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -10$, $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 6$. Знайдіть границі:

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)h(x)}{g(x)}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3f(x) + h(x)}{2g(x) + 15}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3g(x)}{5h(x)}$.

5. Обчисліть границю:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x^9} + 1 \right)$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6}{x^5} + \frac{4}{x^2} + 9 \right)$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{x^3} - \frac{7}{x} - 21 \right)$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{x^2} - 7 \right)$.

6. Обчисліть границю:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{x^3} + 1 \right) \cdot \left(-\frac{8}{x^2} - 2 \right)$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{x^6} - 2 \right) \cdot \left(-\frac{6}{x^{10}} - 3 \right)$.

7. Обчисліть границю:

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + x + 2})$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 + x + 2})$.

8. Обчисліть границю:

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x - 2\sqrt{x} + 5}{x - 1}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2\sqrt{-x} + 1}{3 - \sqrt{-x}}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + 3}{\sqrt{x} - 1}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + x\sqrt[3]{x} - 1}{3\sqrt{-x} - 5x\sqrt[3]{x}}$.

- 9.** Накресліть ескіз графіка функції, визначеної на R , яка задовольняє заданим умовам:
- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$;
 - 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 4, f(2) = -1, f(-3) = 5$.
- 10.** Використовуючи означення границі функції на нескінченності доведіть, що:
- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{4x-1} = \frac{1}{4}$;
 - 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-3x}{x+4} = -3$;
 - 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}-1} = 0$;
 - 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} = 0$.
- 11.** Обчисліть границю:
- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-x^2+1}{5x^2-2x}$;
 - 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-2x^2+4}{3x^2+2x}$.
- 12.** Знайдіть такі значення p і q , такі, щоб виконувалися рівності:
- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{px+3}{qx+8} = \frac{2}{5}$;
 - 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{px^2+6}{qx^2-17x+20} = \frac{7}{4}$.

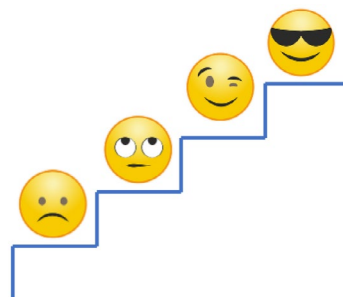
Рівень С

- 1.** Обчисліть границю:
- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$;
 - 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)\dots(1+10x)}{x^{10}+1}$.
- 2.** Обчисліть границю:
- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x^2)^{10}}{(1+2x^{10})^2}$;
 - 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+3x^{11})^3}{(1+8x^5)^7}$.
- 3.** Обчисліть границю:
- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+a-\sqrt{x^2+bx+c})$;
 - 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)$.
- 4.** Обчисліть границю:
- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1})$;
 - 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2})$.
- 5.** Знайдіть p та q , якщо:
- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{px^2+1}{qx+2} + x - 2 \right) = -1$;
 - 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2-1}{x+1} + px + q \right) = 1$.
- 6.** Знайдіть a та b , якщо:
- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x+1} + ax - b) = 0$;
 - 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - ax + b) = 0$.
- 7. Творче завдання.** Розробіть опорний конспект до теми в довільному інтернет середовищі (Canva, Figma тощо).

ІХ. Рефлексія (1 хв)

Зобразіть сходи успіху і позначте свій рівень розуміння теми уроку.

- 1 сходинка — «Мені важко, потрібно ще попрацювати».
- 2 сходинка — «Я щось зрозумів/зрозуміла, але ще маю запитання».
- 3 сходинка — «Можу розв'язувати завдання самостійно».
- 4 сходинка — «Можу пояснити завдання іншим».



Можливі теми проєктів

1. Використання комп'ютерних програм (GeoGebra, Desmos) для дослідження границь функцій при $x \rightarrow \infty$.
2. Типові помилки при обчислення границь функцій на нескінченності та способи їхнього уникнення.
3. Моделювання довготривалих процесів за допомогою границь функцій на нескінченності.
4. Вивчення поведінки прибутку або витрат у довгостроковій перспективі, за допомогою границь функцій на нескінченності.
5. Границі на нескінченності в астрономії.

Список використаних джерел

- 1) Алгебра : підручн. для 11 кл. з поглибленим вивченням математики : у 2 ч. / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Харків : Гімназія, 2011. Ч. 1. — 256 с. : іл.
- 2) Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Рабінович Ю. М., Якір М. С. Вчимося розв'язувати задачі з початків аналізу. — Тернопіль: «Підручники & посібники», 2001. — 304 с: іл.