

11

Тема 1.

Границя та неперервність функції

Урок 2. Границя функції в точці за Гейне

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) навчитеся за графічною ілюстрацією функції встановлювати чи має функція границю функції у заданих точках;
- 2) дізнаєтесь означення границі функції в точці за Гейне;
- 3) навчитеся наводити приклади функцій, які не мають границі в певних точках;
- 4) навчитеся використовувати набуті знання щодо розв'язування практичних задач.

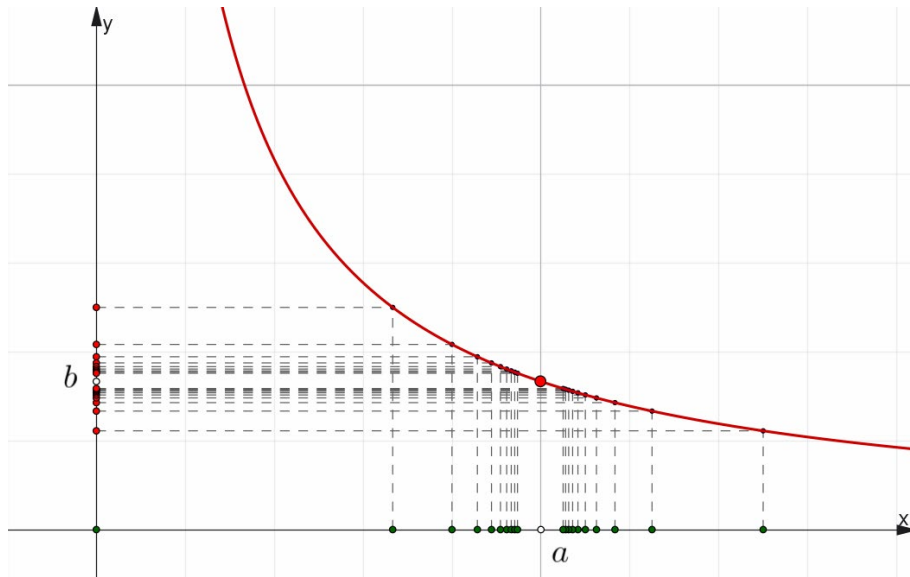
II. Повторення

1. Знайдіть границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n^2}$.
2. Чи є послідовність $x_n = \frac{n^2 + 4}{n + 3}$ збіжною?
3. Чому дорівнює границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a}$, де $a \geq 0$.
4. Обчисліть границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n - 1}{3n^3 + n - 2}$.
5. Знайдіть помилку в міркуваннях $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} \right)}_n =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \dots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}_n = \underbrace{0 + 0 + \dots + 0}_n = 0.$

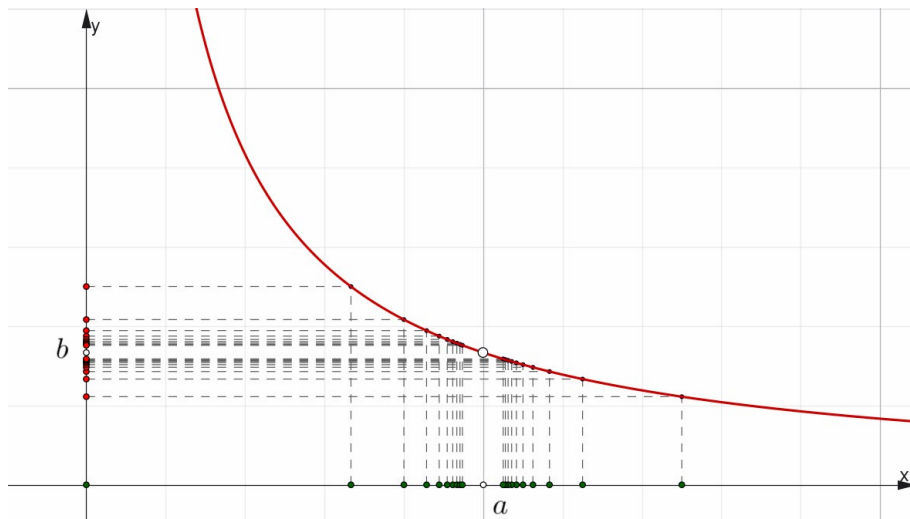
III. Приклади, що приводять до поняття границі функції в точці (3 хв)

Розглянемо три функції, які відрізняються лише своїми значеннями у деякій точці $x = a$:

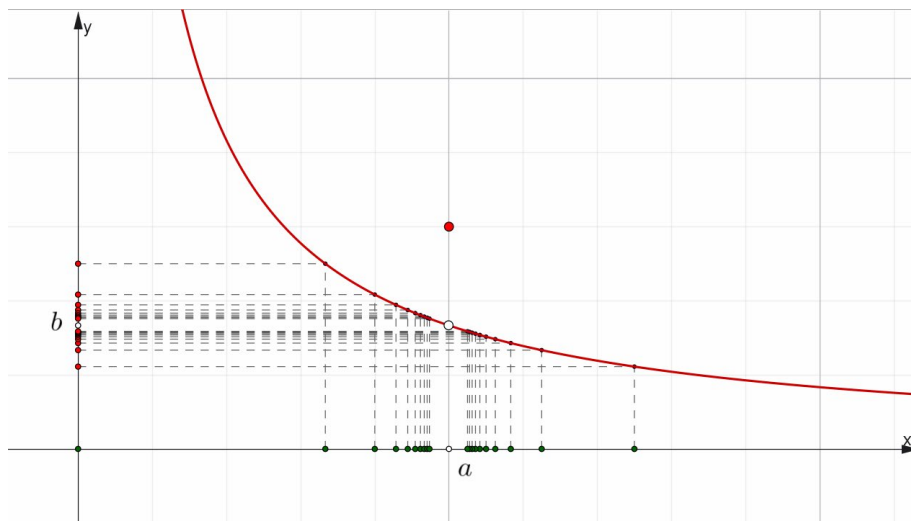
1) Значення функції в точці a дорівнює b (див. рисунок).



2) Значення функції в точці a не існує (див. рисунок).



3) Значення функції в точці a дорівнює якомусь відмінному від b числу (див. рисунок).



Не зважаючи на те, що поведінка функцій у точці a відрізняється усі вони мають таку властивість:

Якщо обирати якусь збіжну до a числову послідовність (a_n) , усі члени якої відмінні від a , то послідовність яка утворена значеннями функції в точках a_n буде збігатися до числа b .

У таких випадках говорять, що границя функції $f(x)$ у точці a , дорівнює числу b .

Записують це таким чином: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

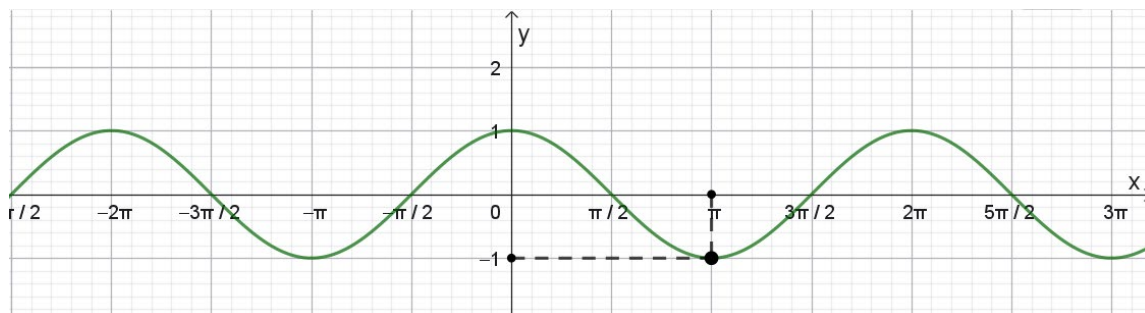
Для кращого розуміння поняття границі функції в точці можна скористатися Geogebra-аплетами, які доступні за посиланням:

<https://www.geogebra.org/m/bk2cbhvv>

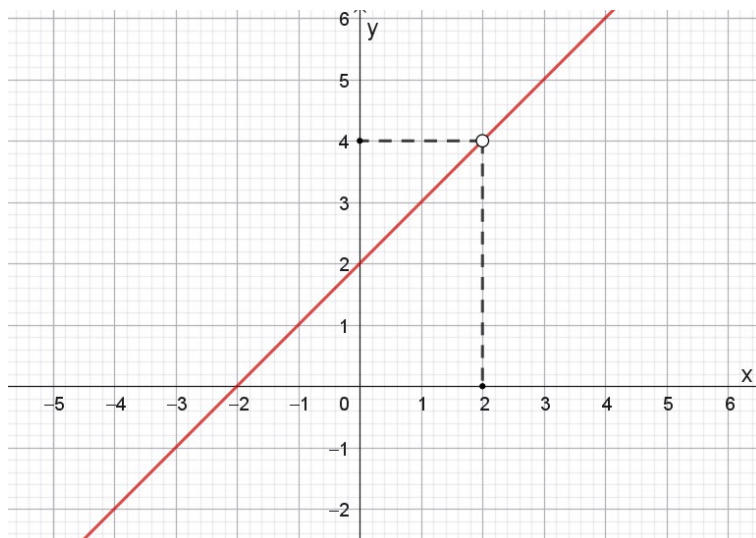


IV. Графічна ілюстрація поняття границі функції в точці (3 хв)

За допомогою графічних ілюстрацій можна визначати границі функції в точці, наприклад можна встановити, що $\lim_{x \rightarrow \pi} \cos x = -1$ (див. рисунок).



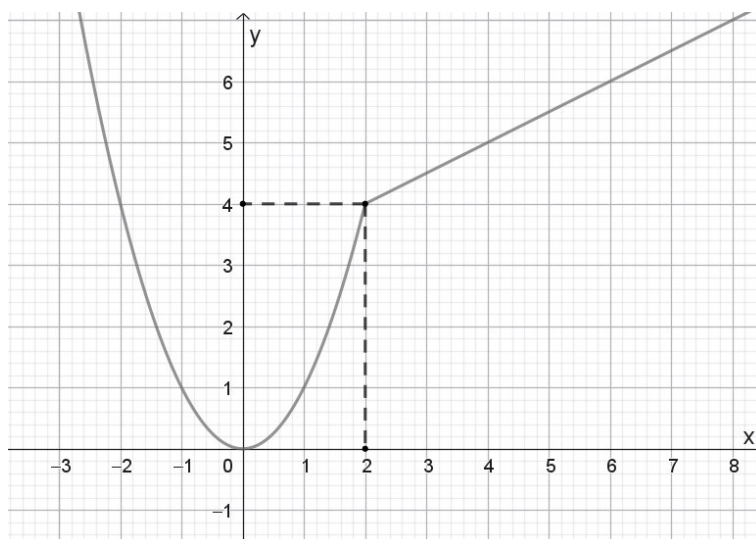
Також, за допомогою графічної ілюстрації можна встановити, що $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{2-x} = 4$ (див. рисунок).



Приклад 1. Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2, \\ \frac{1}{2}x + 3, & x \geq 2 \end{cases}$ та установіть чому дорівнює

границя функції $f(x)$ в точці $x = 2$.

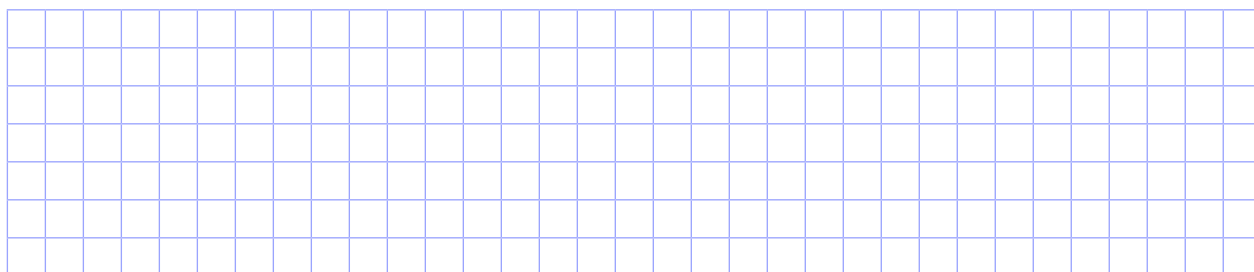
Розв'язання.

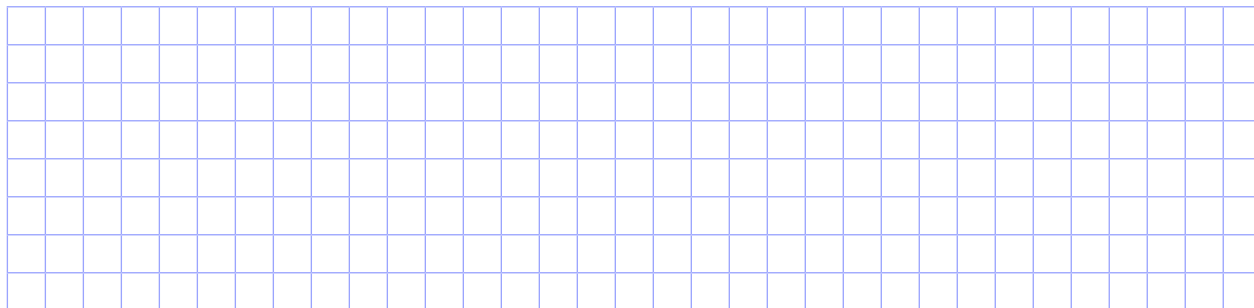


$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4.$$

Відповідь. 4.

Приклад 2. Побудуйте графік функції $f(x) = \frac{x^4 - x^2}{x^2 - 1}$ та установіть чому дорівнює границя функції $f(x)$ в точці $x = 1$.





V. Означення границі функції в точці за Гейне (3 хв)

Означення. Число b називають **границею** функції f у точці a , якщо для будь-якої збіжної до a послідовності $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ значень аргументу функції f таких, що $a_n \neq a$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, відповідна послідовність $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n), \dots$ значень функції збігається до числа b .

Вимога $a_n \neq a$ означає, що значення функції в точці a не залежить від значення $f(a)$, а також дозволяє функції мати границю в точці, в якій функція не існує.

Приклад 3. Доведіть, використовуючи означення границі функції за Гейне, що

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 + x - 2} = 2.$$

Розв'язання. Візьмемо довільну послідовність x_n таку, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ ($x_n \neq 1$).

Тоді на підставі теорем про границі послідовностей маємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 + 4x_n - 5}{x_n^2 + x_n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_n - 1)(x_n + 5)}{(x_n - 1)(x_n + 2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n + 5}{x_n + 2} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + 5}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + 2} = \frac{1 + 5}{1 + 2} = 2$$

Отже, за означенням границі функції за Гейне, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 + x - 2} = 2$, що й треба було довести.

Приклад 4. Знайдіть границю $\lim_{x \rightarrow 6} \sqrt[3]{4x + 3}$.

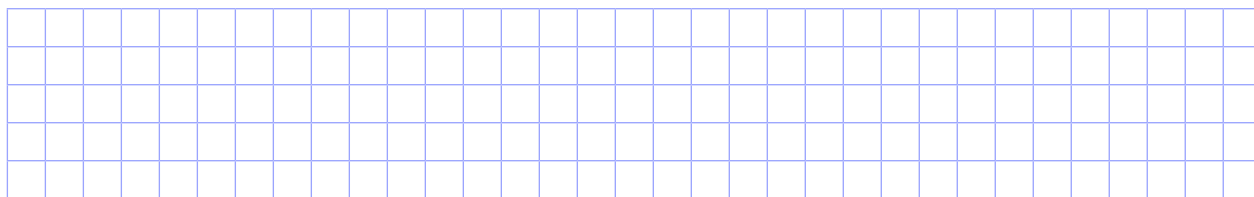
Розв'язання. Розглянемо довільну послідовність (a_n) значень аргументу функції $f(x) = \sqrt[3]{4x + 3}$ таку, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 6$ і $a_n \neq 6$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді відповідна послідовність $f(a_n)$ значень функції задається формулою $f(a_n) = \sqrt[3]{4a_n + 3}$. Скориставшись теоремами про арифметичні дії зі збіжними послідовностями та теоремою про границю кореня, отримуємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{4a_n + 3} = \sqrt[3]{4 \cdot 6 + 3} = 3$$

Оскільки послідовність (a_n) вибрано довільно, то $\lim_{x \rightarrow 6} \sqrt[3]{4x + 3} = 3$.

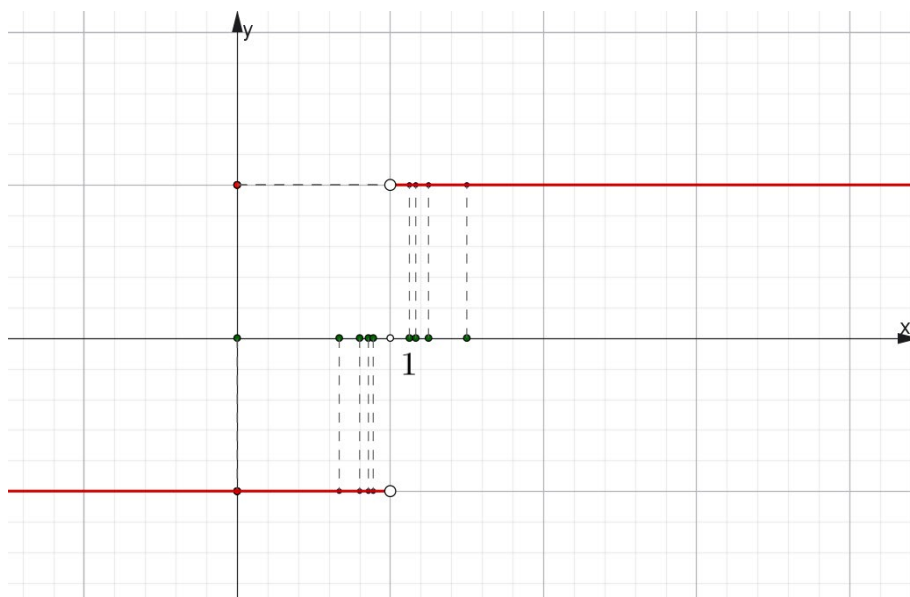
Відповідь. 3.

Приклад 5. Доведіть за допомогою означення границі функції в точці, що $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x^2}{x^2 - 1} = 1$.



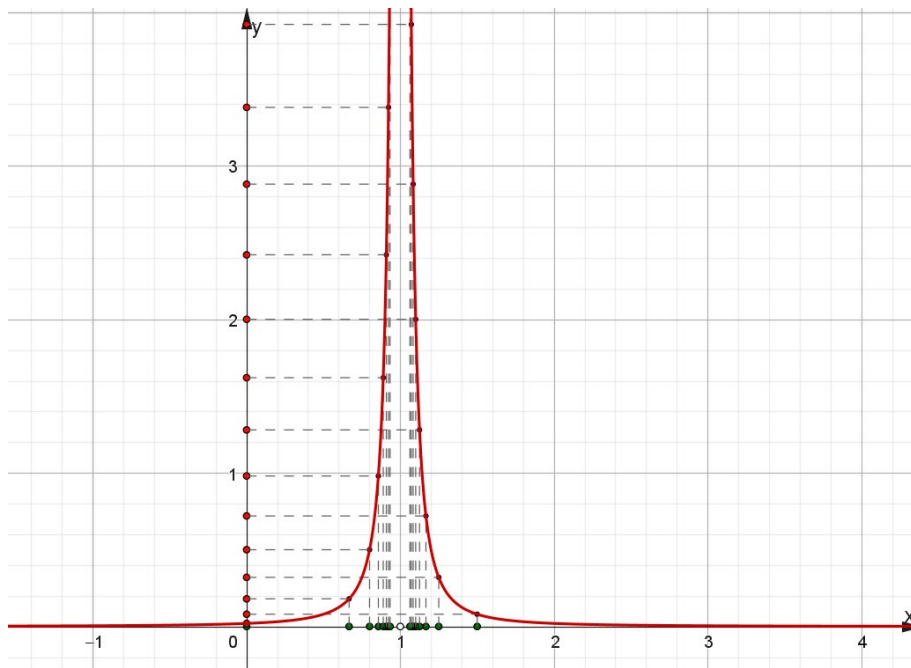
VI. Приклади функцій, які не мають границі в певних точках (5–7 хв)

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$ та побудуємо її графік (див. рисунок).



То бачимо, що коли обрати послідовність a_n , яка збігається до числа 1 і усі члени якої відмінні від 1 (див. рисунок), то послідовність утворена значеннями функції $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$ не збігається до якогось певного числа, а усі її значення дорівнюють 1 або (-1) , тобто ця послідовність границі не має.

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{50(x-1)^2}$ та побудуємо її графік (див. рисунок).



Якщо послідовність значень аргументу x прямує до 1, то члени відповідної послідовності значень функції стають усе більшими. Тому не існує числа до якого прямують значення функції, якщо значення аргументу наближаються до 1.

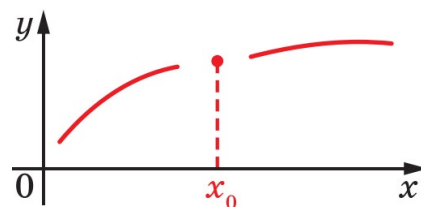
Детальніше розглянути два вищенаведені приклади можна за допомогою Geogebra-аплетів, що доступні за посиланням:

<https://www.geogebra.org/m/gbnzhuhp>



Розглянемо функцію, задану за допомогою графіка (див. рисунок).

Для точки x_0 з області визначення не існує збіжної до x_0 послідовності відмінних від x_0 значень аргументів функції. Тому в точці x_0 дана функція границі не має.



Приклад 6. Доведіть, що функція $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$ не має границі в точці $x = 1$.

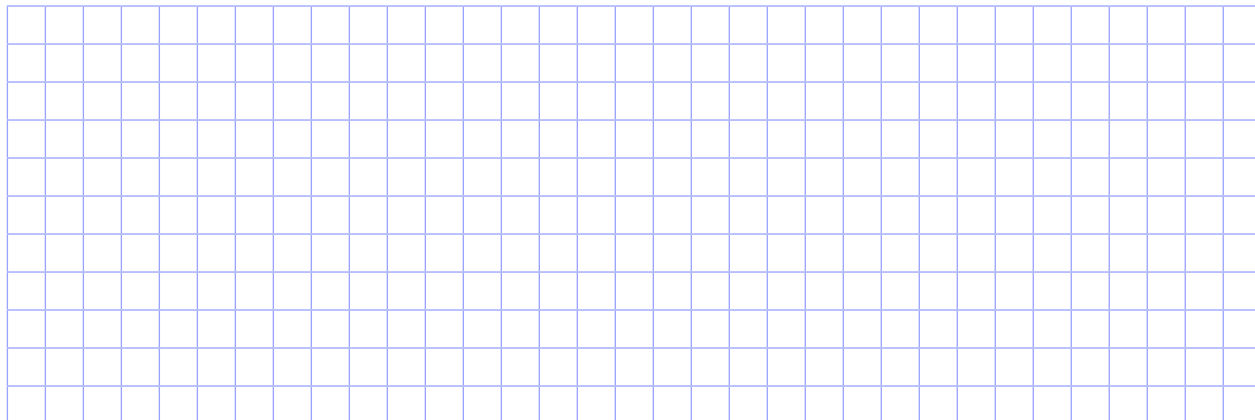
Доведення. Якщо розглянути наприклад послідовність $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$, то зрозуміло, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ і $a_n \neq 1$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Послідовність відповідних значень функції задається формулою:

$$f(a_n) = \frac{\left|1 + \frac{(-1)^n}{n} - 1\right|}{1 + \frac{(-1)^n}{n} - 1} = \frac{\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|}{\frac{(-1)^n}{n}} = (-1)^n.$$

Як відомо, послідовність $(-1)^n$ границі не має, тому функція $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$ не має границі в точці $x = 1$, що й треба було довести.

Приклад 7. Доведіть, що функція $f(x) = \frac{1}{50(x-1)^2}$ не має границі в точці $x = 1$.



Приклад 8. Доведіть, що функція $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ не має границі в точці $a = 0$.

Доведення. Розглянемо послідовності (a_n) і (b_n) значень аргументу функції f такі,

$$\text{що } a_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}, \quad b_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2\pi n}.$$

Зрозуміло, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ і $a_n \neq 0, b_n \neq 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Оскільки $f(a_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$, то послідовність $(f(a_n))$ є стаціонарною послідовністю: $1, 1, 1, \dots$

Оскільки $f(b_n) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right) = -1$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$, то послідовність $(f(b_n))$ є стаціонарною послідовністю: $-1, -1, -1, \dots$

Маємо: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = -1$.

Отже, функція $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ не має границі в точці $a = 0$.

Що й треба було довести.

VII. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Під час вимірювання температури повітря електронний термометр показує значення, яке залежить від часу t (у секундах) після вмикання за формулою

$$T(t) = \begin{cases} 18 + \frac{t-10}{|t-10|} \cdot 0,5, & t \geq 0, t \neq 10, \\ 15, & t = 10. \end{cases}$$

- 1) Побудуйте графік функції $T(t)$ та установіть в яких точках функція має границю.
- 2) Доведіть, що функція не має границі в точці $t=10$.
- 3) Поясніть фізичний зміст отриманого результату.

Історична довідка

Походження поняття границі, коріння якого сягає глибокої давнини, пов'язане з визначенням площ криволінійних фігур і об'ємів тіл, обмежених кривими поверхнями.

Перше теоретичне узагальнення та обґрунтування методів обчислення площ і об'ємів, у яких неявно використовувалися граничні переходи, було здійснене видатним грецьким математиком IV ст. до н. е. Евдоксом Кнідським. Метод Евдокса у XVII ст. отримав назву методу вичерпування. Ним користувалися Евклід, Архімед та інші вчені давнини. В довгій еволюції, яку протягом майже 2500 років зазнало поняття границі, метод вичерпування становить перший етап.

За допомогою методу вичерпування в «Началах» доводиться низка тверджень, зокрема й теорема про те, що об'єми двох куль відносяться як куби їхніх радіусів. Стискаючи коло радіуса a , Архімед отримує еліпс з півсями a , b і доводить, що відношення площі еліпса до площі кола виражається відношенням малої півосі до великої, тобто $b : a$, а площа еліпса дорівнює πab .

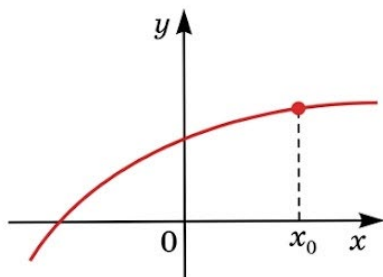
У Архімеда метод вичерпування зазнав деяких змін і застосовується для доведення того, що коло рівновелике трикутнику з основою, рівною довжині кола, і висотою, що дорівнює радіусу, для визначення площі параболічного сегмента та ін.

Метод вичерпування використовувався у XVII–XVIII ст., а в деяких навчальних посібниках — і в XIX та на початку XX ст. (Глейзер Г.І. Історія математики в школі).

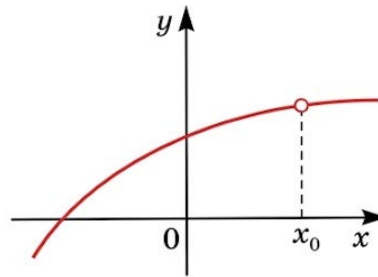
VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

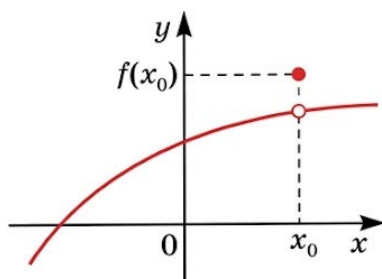
1. Чи існує границя функції в точці x_0 (див. рисунок):



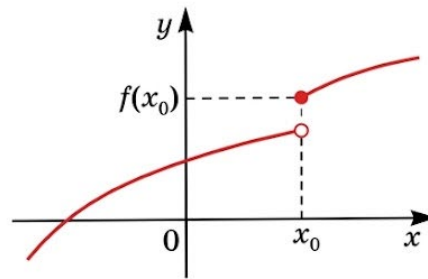
а)



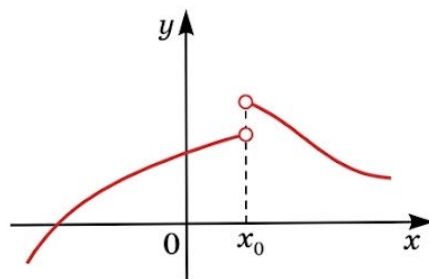
б)



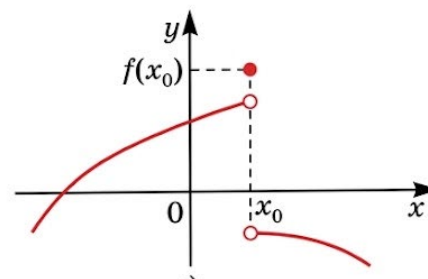
в)



г)



д)



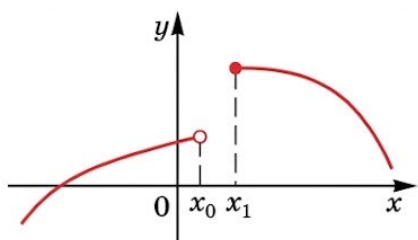
е)

2. За допомогою означення границі функції в точці доведіть, що $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 5) = 7$.
3. Побудуйте графік функції $f(x)$ та укажіть (без доведення), чи має функція f границю в точці a :
- | | |
|---|---|
| 1) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, a = 1;$ | 2) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, a = 2;$ |
| 3) $f(x) = x + 2, a = 1;$ | 4) $f(x) = x + 2, a = 1.$ |
4. Обчисліть границю функції $y = f(x)$ у точці $a = 0$, якщо:
- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| 1) $f(x) = x - 5;$ | 2) $f(x) = x^2 - x + 7;$ |
| 3) $f(x) = \sqrt{2x + 1};$ | 4) $f(x) = 3x^2 - x;$ |
| 5) $f(x) = \frac{x}{x + 7};$ | 6) $f(x) = \frac{7}{x + 7}.$ |

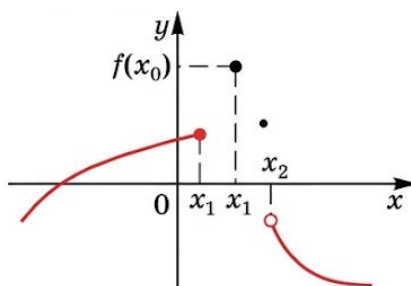
5. Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1, & x \leq 1, \\ x - 4, & x > 1 \end{cases}$ та установіть чи має ця функція границю в точці $x = 1$.
6. Знайдіть $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 1}{x + 1}$.

Рівень В

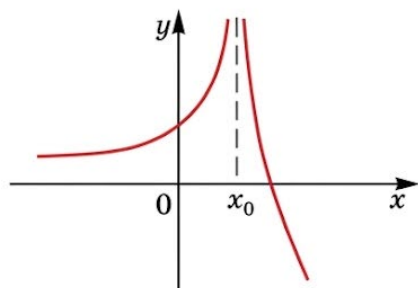
1. Чи існує границя функції в точці x_0 (див. рисунок):



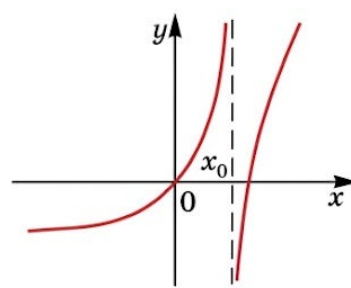
ж)



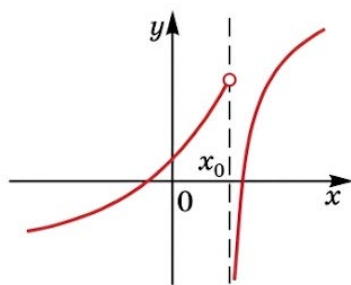
з)



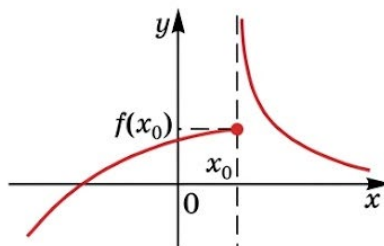
и)



к)



л)



м)

2. Дано функцію $f(x) = \begin{cases} 3, & x \leq -2, \\ x^2 + 1, & -2 < x < 2, \\ \frac{5}{x-1}, & x \geq 2. \end{cases}$ Побудуйте графік цієї функції та установіть чи має функція границю в точках $x = -2$ та $x = 2$.

3. Побудуйте графік функції $f(x)$ та укажіть (без доведення), чи має функція f границю в точці a :

1) $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}, a = 2;$

2) $f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}, a = 2;$

3) $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}, a = 1;$

4) $f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}, a = 1;$

4. Обчисліть, користуючись означенням границі функції в точці:

1) $\lim_{x \rightarrow 10} (12x - 30);$

2) $\lim_{x \rightarrow 5} (8 - 3x);$

3) $\lim_{x \rightarrow 5} (2x^2 - 0,5);$

4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1};$

5) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4};$

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4x}{3x + 5x^2}.$

5. За допомогою означення знайдіть границю функції в точці:

1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2};$

2) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6};$

3) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{(x+2)(x-3)};$

4) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x^4 + x^2 - 12}.$

6. Доведіть, що функція $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ не має границі в точці $a = 0$.

7. Доведіть, що функція $f(x) = \frac{1}{x}$ не має границі в точці $a = 0$.

8. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x}.$

9. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 6} \sqrt[4]{3x - 2}.$

10. Доведіть, що $\lim_{x \rightarrow a} (kx + b) = ka + b.$

11. Наведіть приклад такої функції $f(x)$, що $\lim_{x \rightarrow 0} f(-x + 1) = -3.$

12. Знайдіть $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^4 - (1+4x)}{x^2 + x^4}.$

Рівень С

1. Доведіть, що границя многочлена $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ при $x \rightarrow x_0$ дорівнює значенню цього многочлена при $x = x_0$, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0).$

2. Якщо $P(x)$ і $Q(x)$ — многочлени, причому $Q(x_0) \neq 0$, то границя дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}$ при

$x \rightarrow x_0$ дорівнює його значенню при $x = x_0$, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$ Доведіть.

3. За допомогою означення знайдіть границю функції в точці:

1) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49};$

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+3x} - 2}{\sqrt{x} - 1};$

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - \sqrt{2x+2}}{x^2 - 4x + 3};$

4) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}.$

4. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$.
5. Доведіть, що функція Діріхле $\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ не має границі в жодній точці.
6. Функція f визначена на $\mathbb{R}$ і $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. Знайдіть границю $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{x}{3}\right)$.
7. **Творче завдання.** Напишіть програму, яка ілюструє означення границі в точці за Гейне.

Рефлексія

1. Я вмію за графічною ілюстрацією функції встановлювати чи має функція границю функції у заданих точках.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
2. Я знаю означення границі функції в точці за Гейне.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
3. Я вмію наводити приклади функцій, які не мають границі в певних точках.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
4. Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----

Можливі теми проєктів

1. Перевірка існування границі функції в точці за допомогою різних послідовностей.
2. Дослідження границі функції з коливаннями поблизу заданих точок.
3. Прикладні задачі, що приводять до поняття границі функції в точці.
4. Типові помилки при знаходженні границь функції в точці за Гейне.
5. Контрприклад як інструмент дослідження границі функції в точці.

