

11

Тема 1.

Границя та неперервність функції

Урок 2. Границя функції в точці за Гейне

Тип уроку: урок засвоєння нових знань.

План уроку

1. Приклади, що приводять до поняття границі функції в точці.
2. Графічна ілюстрація поняття границі функції в точці.
2. Означення границі функції в точці за Гейне.
3. Приклади функцій, які не мають границі в певних точках.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

визначає межі даних, формулює припущення щодо даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.3–1 П];

добирає додаткову інформацію з різних джерел і галузей знань [12 МАО 2.1.2–1 П];

визначає необхідність і достатність набору даних проблемної ситуації та математичних фактів для її розв'язання [12 МАО 3.1.1–2 П];

добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово упродовж викладення матеріалу.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.

- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 6) Обов'язково пропонуйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.
- 7) Обов'язково пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності маркування – на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 8) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Робота над обраним проєктом може тривати упродовж вивчення (повторення) усієї змістової теми. Створення проєктів та їх захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.
- 9) Темати проєктів можуть бути запропоновані вами практичні завдання за рівнями маркування А, В, С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівні В або С. Можливі теми для створення проєктів запропоновані.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Датчик вимірює тиск у трубі, але в момент аварії значення «обривається». Чи можемо ми визначити тиск безпосередньо перед цим моментом?
- 2) Чому в програмуванні іноді важливіше те, як поводить себе функція поблизу точки, ніж її значення в самій точці?
- 3) Чи може функція не бути визначеною в точці, але при цьому мати в ній границю?
- 4) Чи можна вважати границю своєрідним «прогнозом» поведінки функції?
- 5) Які реальні процеси не можна описати точно в певний момент часу, але можна – при наближенні до цього моменту?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Знайдіть границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n^2}$.
Відповідь. 1.
2. Чи є послідовність $x_n = \frac{n^2 + 4}{n + 3}$ збіжною?
Відповідь. Ні.

3. Чому дорівнює границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a}$, де $a \geq 0$.

Відповідь. 1.

4. Обчисліть границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n - 1}{3n^3 + n - 2}$.

Відповідь. $\frac{1}{3}$.

5. Знайдіть помилку в міркуваннях $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} \right)}_n =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \dots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \underbrace{0 + 0 + \dots + 0}_n = 0.$$

Відповідь. Не можна застосовувати теорему про границю суми для нескінченної кількості доданків.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Під час вимірювання температури повітря електронний термометр показує значення, яке залежить від часу t (у секундах) після вмикання за формулою

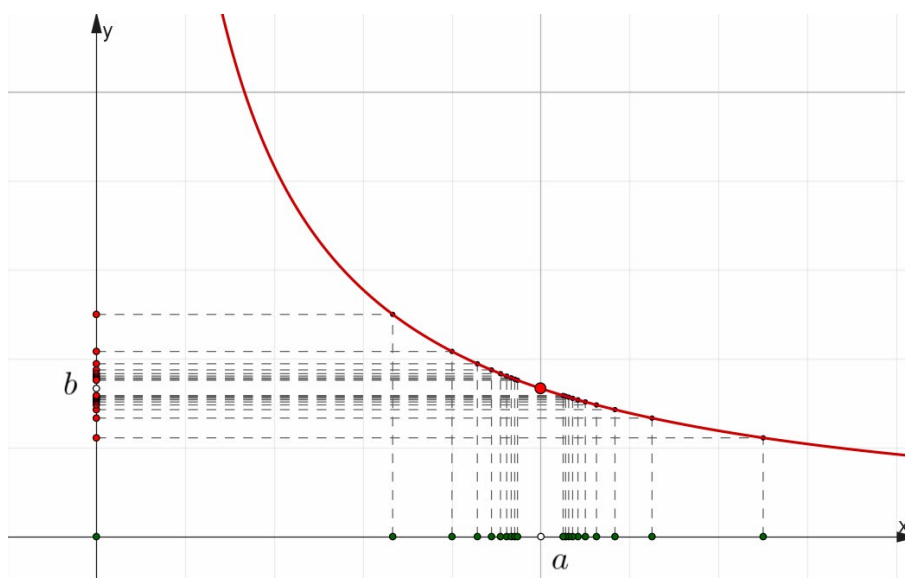
$$T(t) = 18 + \frac{t-10}{|t-10|} \cdot 0,5, \quad t \neq 10.$$

- 1) Побудуйте графік функції $T(t)$ та установіть в яких точках функція має границю.
- 2) Доведіть, що функція не має границі в точці $t=10$.
- 3) Поясніть фізичний зміст отриманого результату.

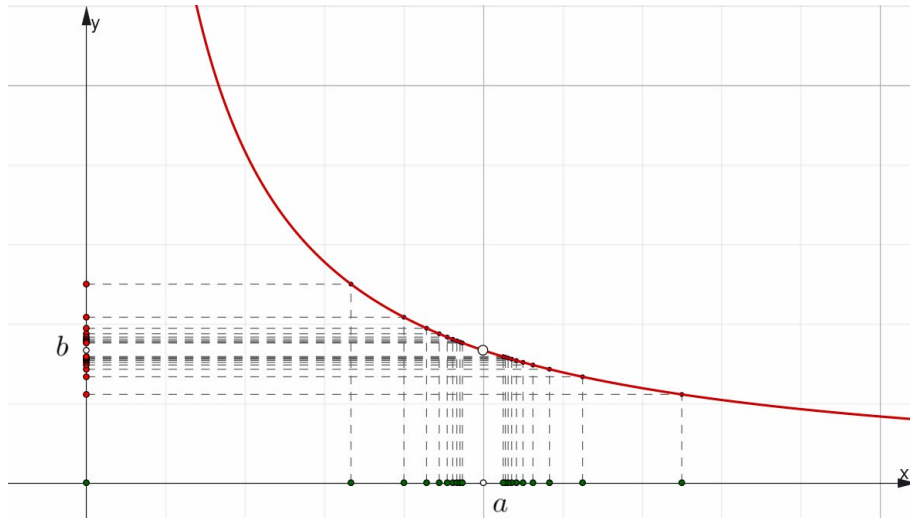
III. Приклади, що приводять до поняття границі функції в точці (3 хв)

Розглянемо три функції, які відрізняються лише своїми значеннями у деякій точці $x = a$:

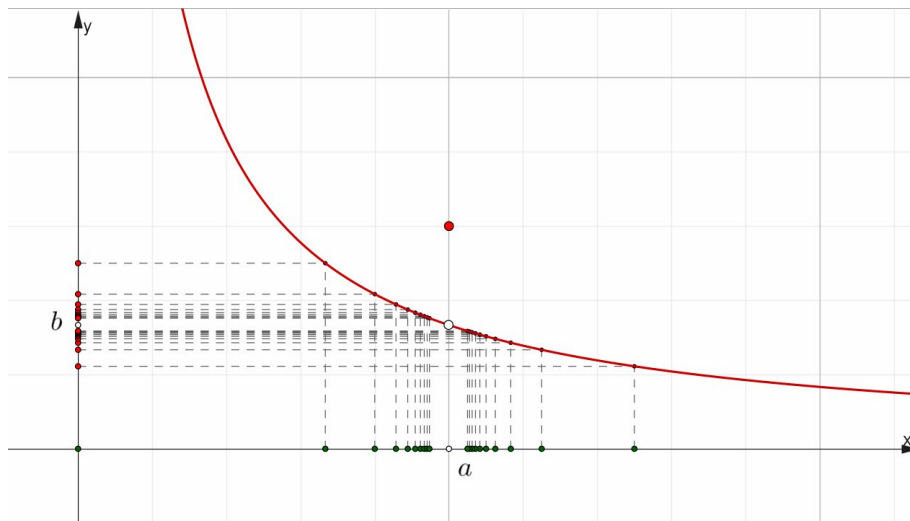
- 1) Значення функції в точці a дорівнює b (див. рисунок).



2) Значення функції в точці a не існує (див. рисунок).



3) Значення функції в точці a дорівнює якомусь відмінному від b числу (див. рисунок).



Не зважаючи на те, що поведінка функцій у точці a відрізняється усі вони мають таку властивість:

Якщо обирати якусь збіжну до a числову послідовність (a_n) , усі члени якої відмінні від a , то послідовність яка утворена значеннями функції в точках a_n буде збігатися до числа b .

У таких випадках говорять, що границя функції $f(x)$ у точці a , дорівнює числу b .

Записують це таким чином: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

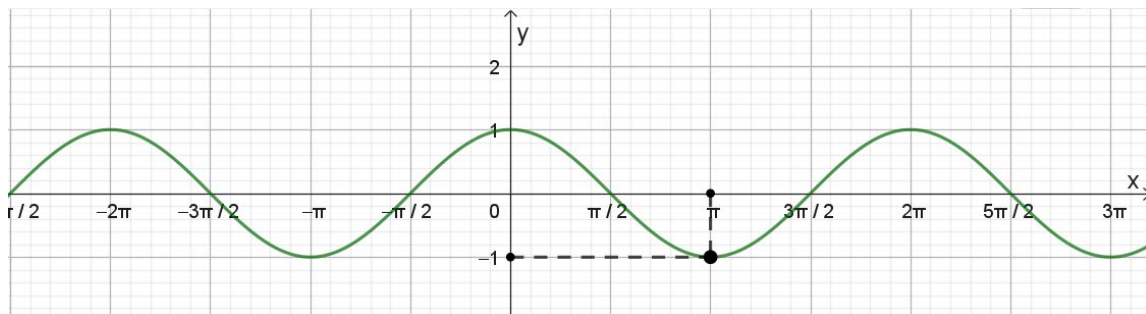
Для кращого розуміння поняття границі функції в точці можна скористатися Geogebra-аплетами, які доступні за посиланням:

<https://www.geogebra.org/m/bk2cbhvv>

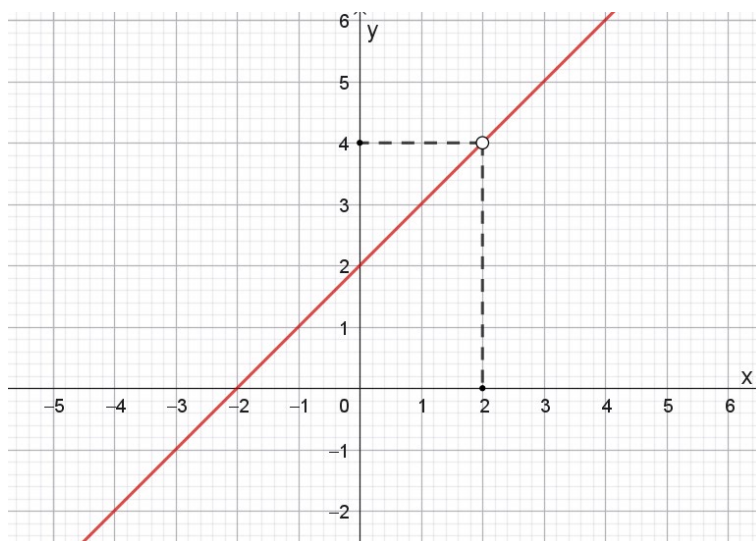


IV. Графічна ілюстрація поняття границі функції в точці (3 хв)

За допомогою графічних ілюстрацій можна визначати границі функції в точці, наприклад можна встановити, що $\lim_{x \rightarrow \pi} \cos x = -1$ (див. рисунок).



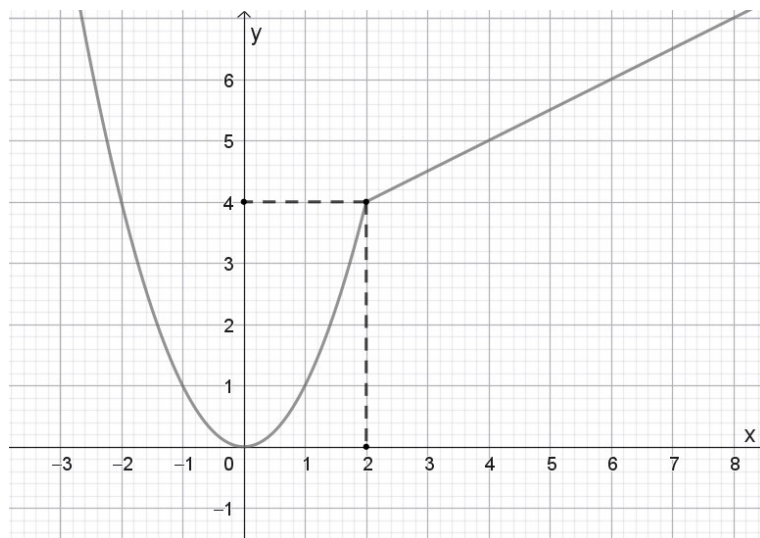
Також, за допомогою графічної ілюстрації можна встановити, що $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{2 - x} = 4$ (див. рисунок).



Ілюстративні приклади (5 хв)

6. Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2, \\ \frac{1}{2}x + 3, & x \geq 2 \end{cases}$ та установіть чому дорівнює границя функції $f(x)$ в точці $x = 2$.

Розв'язання.



$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4.$$

Відповідь. 4.

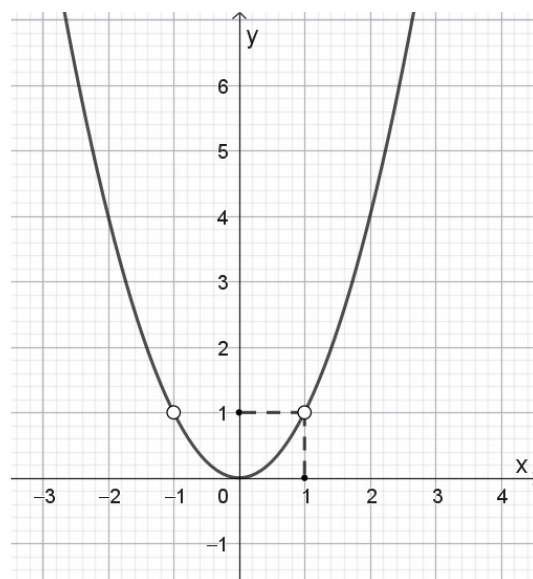
7. Побудуйте графік функції $f(x) = \frac{x^4 - x^2}{x^2 - 1}$ та установіть чому дорівнює границя функції $f(x)$ в точці $x = 1$.

Розв'язання. Якщо $x \neq -1$ і $x \neq 1$, то графік функції $f(x) = \frac{x^4 - x^2}{x^2 - 1}$ співпадатиме з графіком функції $g(x) = x^2$.

Побудуємо графік функції $f(x) = \frac{x^4 - x^2}{x^2 - 1}$ (див. рисунок).

З рисунка видно, що $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x^2}{x^2 - 1} = 1$.

Відповідь. 1.



V. Означення границі функції в точці за Гейне (3 хв)

Означення. Число b називають **границею** функції f у точці a , якщо для будь-якої збіжної до a послідовності $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ значень аргументу функції f таких, що $a_n \neq a$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, відповідна послідовність $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n), \dots$ значень функції збігається до числа b .

Вимога $a_n \neq a$ означає, що значення функції в точці a не залежить від значення $f(a)$, а також дозволяє функції мати границю в точці, в якій функція не існує.

Ілюстративні приклади (5 хв)

8. Доведіть, використовуючи означення границі функції за Гейне, що

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 + x - 2} = 2.$$

Розв'язання. Візьмемо довільну послідовність x_n таку, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ ($x_n \neq 1$).

Тоді на підставі теорем про границі послідовностей маємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 + 4x_n - 5}{x_n^2 + x_n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_n - 1)(x_n + 5)}{(x_n - 1)(x_n + 2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n + 5}{x_n + 2} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + 5}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + 2} = \frac{1 + 5}{1 + 2} = 2$$

Отже, за означенням границі функції за Гейне, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 + x - 2} = 2$, що й треба було довести.

9. Знайдіть границю $\lim_{x \rightarrow 6} \sqrt[3]{4x + 3}$.

Розв'язання. Розглянемо довільну послідовність (a_n) значень аргументу функції $f(x) = \sqrt[3]{4x + 3}$ таку, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 6$ і $a_n \neq 6$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді відповідна послідовність $f(a_n)$ значень функції задається формулою $f(a_n) = \sqrt[3]{4a_n + 3}$. Скориставшись теоремами про арифметичні дії зі збіжними послідовностями та теоремою про границю кореня, отримуємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{4a_n + 3} = \sqrt[3]{4 \cdot 6 + 3} = 3$$

Оскільки послідовність (a_n) вибрано довільно, то $\lim_{x \rightarrow 6} \sqrt[3]{4x + 3} = 3$.

Відповідь. 3.

10. Доведіть за допомогою означення границі функції в точці, що $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x^2}{x^2 - 1} = 1$.

Доведення. Візьмемо довільну послідовність x_n таку, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ ($x_n \neq 1$).

Тоді на підставі теорем про границі послідовностей маємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^4 - x_n^2}{x_n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2(x_n^2 - 1)}{x_n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right)^2 = 1$$

Отже, за означенням границі функції за Гейне, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x^2}{x^2 - 1} = 1$, що й треба було довести.

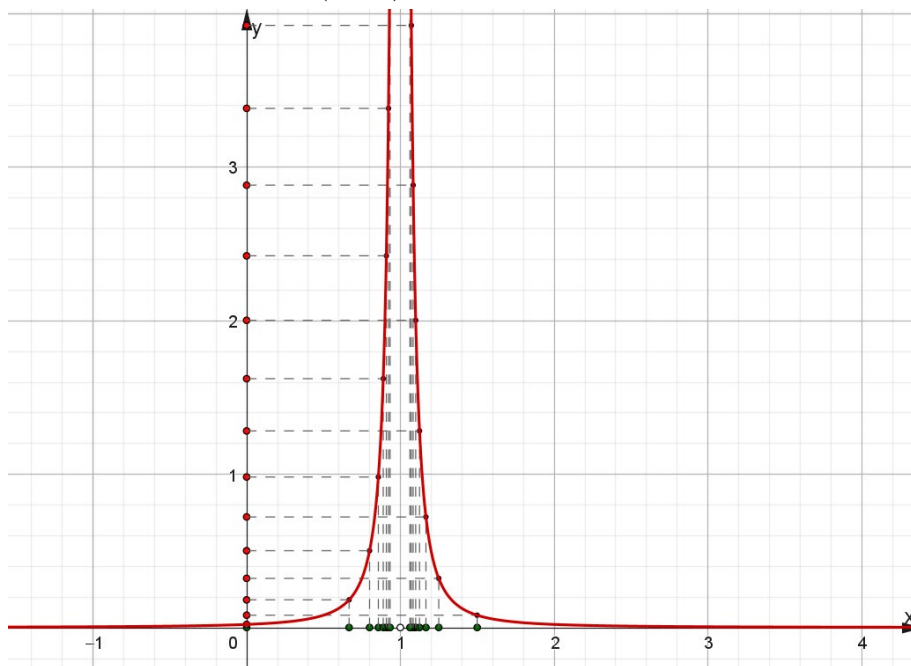
VI. Приклади функцій, які не мають границі в певних точках (5–7 хв)

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{|x - 1|}{x - 1}$ та побудуємо її графік (див. рисунок).



То бачимо, що коли обрати послідовність a_n , яка збігається до числа 1 і усі члени якої відмінні від 1 (див. рисунок), то послідовність утворена значеннями функції $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$ не збігається до якогось певного числа, а усі її значення дорівнюють 1 або (-1) , тобто ця послідовність границі не має.

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{50(x-1)^2}$ та побудуємо її графік (див. рисунок).



Якщо послідовність значень аргументу x прямує до 1, то члени відповідної послідовності значень функції стають усе більшими. Тому не існує числа до якого прямують значення функції, якщо значення аргументу наближаються до 1.

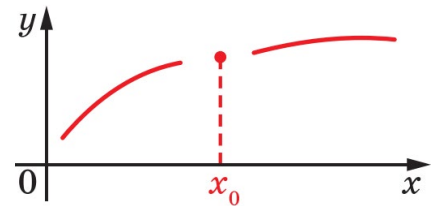
Детальніше розглянути два вищенаведені приклади можна за допомогою Geogebra-аплетів, що доступні за посиланням:

<https://www.geogebra.org/m/gbnzhuhp>



Розглянемо функцію, задану за допомогою графіка (див. рисунок).

Для точки x_0 з області визначення не існує збіжної до x_0 послідовності відмінних від x_0 значень аргументів функції. Тому в точці x_0 дана функція границі не має.



Ілюстративні приклади (5 хв)

- 11.** Доведіть, що функція $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$ не має границі в точці $x = 1$.

Доведення. Якщо розглянути наприклад послідовність $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$, то зрозуміло, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ і $a_n \neq 1$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Послідовність відповідних значень функції задається формулою:

$$f(a_n) = \frac{\left|1 + \frac{(-1)^n}{n} - 1\right|}{1 + \frac{(-1)^n}{n} - 1} = \frac{\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|}{\frac{(-1)^n}{n}} = (-1)^n.$$

Як відомо, послідовність $(-1)^n$ границі не має, тому функція $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$ не має границі в точці $x = 1$, що й треба було довести.

- 12.** Доведіть, що функція $f(x) = \frac{1}{50(x-1)^2}$ не має границі в точці $x = 1$.

Доведення. Якщо розглянути наприклад послідовність $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$, то зрозуміло, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ і $a_n \neq 1$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Послідовність відповідних значень функції задається формулою:

$$f(a_n) = \frac{1}{50 \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} - 1\right)^2} = \frac{n^2}{50}.$$

Послідовність $f(a_n) = \frac{n^2}{50}$ є розбіжною, тому функція $f(x) = \frac{1}{50(x-1)^2}$ не має границі в точці $x = 1$.

- 13.** Доведіть, що функція $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ не має границі в точці $a = 0$.

Доведення. Розглянемо послідовності (a_n) і (b_n) значень аргументу функції f такі,

$$\text{що } a_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}, \quad b_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2\pi n}.$$

Зрозуміло, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ і $a_n \neq 0, b_n \neq 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Оскільки $f(a_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$, то послідовність $(f(a_n))$ є стаціонарною послідовністю: 1, 1, 1,

Оскільки $f(b_n) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right) = -1$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$, то послідовність $(f(b_n))$ є стаціонарною послідовністю: -1, -1, -1,

Маємо: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = -1$.

Отже, функція $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ не має границі в точці $a = 0$.

Що й треба було довести.

VII. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

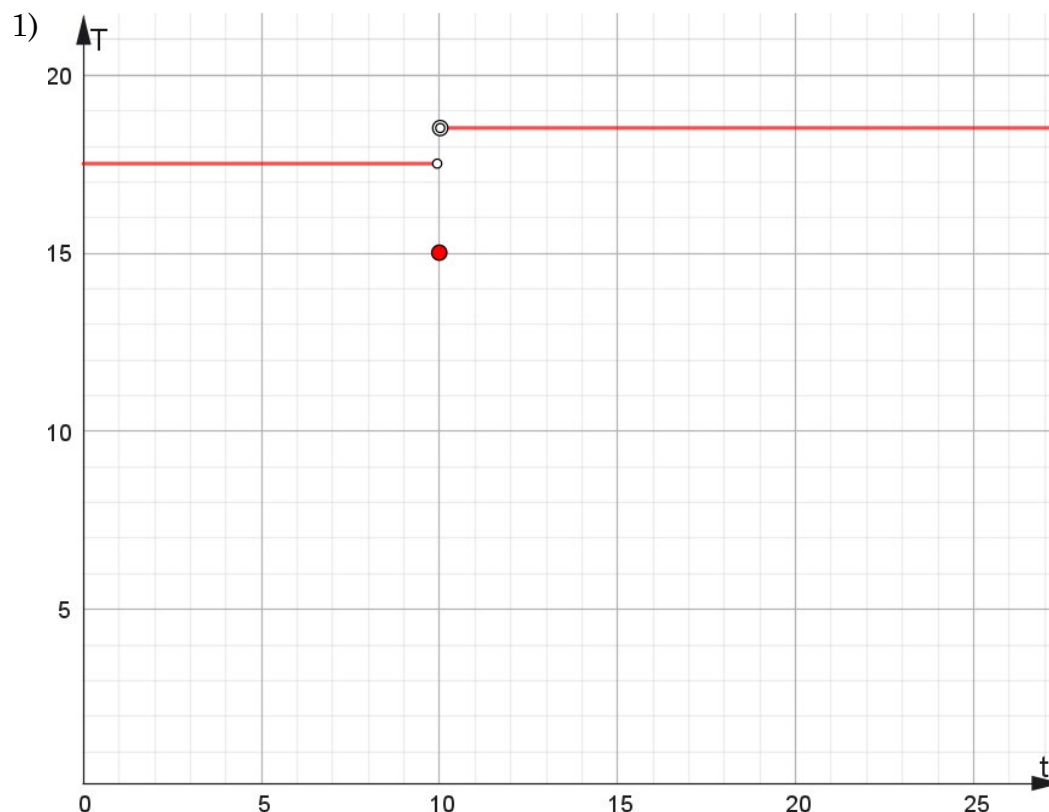
Як я вирішую певну проблему?

Задача. Під час вимірювання температури повітря електронний термометр показує значення, яке залежить від часу t (у секундах) після вмикання за формулою

$$T(t) = \begin{cases} 18 + \frac{t-10}{|t-10|} \cdot 0,5, & t \geq 0, t \neq 10, \\ 15, & t = 10. \end{cases}$$

- 1) Побудуйте графік функції $T(t)$ та установіть в яких точках функція має границю.
- 2) Доведіть, що функція не має границі в точці $t = 10$.
- 3) Поясніть фізичний зміст отриманого результату.

Розв'язання.



Функція має границю в усіх точках області визначення крім $t = 10$.

2) Якщо розглянути наприклад послідовність $t_n = 10 + \frac{(-1)^n}{n}$, то зрозуміло, що $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 10$ і $t_n \neq 10$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Послідовність відповідних значень функції задається формулою:

$$T(t_n) = 18 + \frac{10 + \frac{(-1)^n}{n} - 10}{\left| 10 + \frac{(-1)^n}{n} - 10 \right|} \cdot 0,5 = 18 + \frac{\frac{(-1)^n}{n}}{\left| \frac{(-1)^n}{n} \right|} \cdot 0,5 = 18 + (-1)^n \cdot 0,5.$$

Як відомо, послідовність $18 + (-1)^n \cdot 0,5$ границі не має, тому функція $T(t)$ не має границі в точці $t = 10$, що й треба було довести.

3) У момент часу $t = 10$ відбувається різкий стрибок показів, пов'язаний із затримкою або особливістю роботи датчика.

Історична довідка

Походження поняття границі, коріння якого сягає глибокої давнини, пов'язане з визначенням площ криволінійних фігур і об'ємів тіл, обмежених кривими поверхнями.

Перше теоретичне узагальнення та обґрунтування методів обчислення площ і об'ємів, у яких неявно використовувалися граничні переходи, було здійснене видатним грецьким математиком IV ст. до н. е. Евдоксом Кнідським. Метод Евдокса у XVII ст. отримав назву методу вичерпування. Ним користувалися Евклід, Архімед та інші вчені давнини. В довгій еволюції, яку протягом майже 2500 років зазнало поняття границі, метод вичерпування становить перший етап.

За допомогою методу вичерпування в «Началах» доводиться низка тверджень, зокрема й теорема про те, що об'єми двох куль відносяться як куби їхніх радіусів. Стискаючи коло радіуса a , Архімед отримує еліпс з півосями a , b і доводить, що відношення площі еліпса до площі кола виражається відношенням малої півосі до великої, тобто $b : a$, а площа еліпса дорівнює πab .

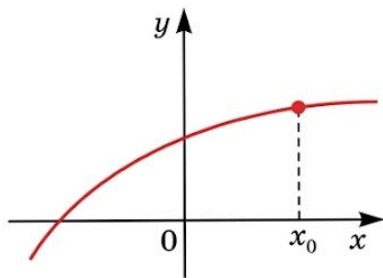
У Архімеда метод вичерпування зазнав деяких змін і застосовується для доведення того, що коло рівновелике трикутнику з основою, рівною довжині кола, і висотою, що дорівнює радіусу, для визначення площі параболічного сегмента та ін.

Метод вичерпування використовувався у XVII–XVIII ст., а в деяких навчальних посібниках — і в XIX та на початку XX ст. (Глейзер Г.І. Історія математики в школі).

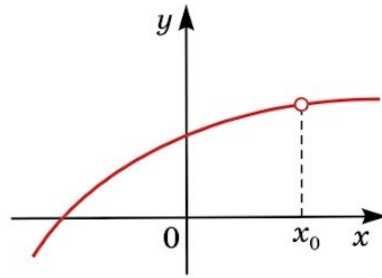
VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (5–10 хв)

Рівень А

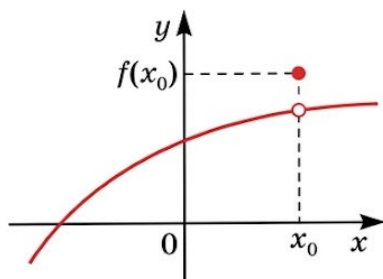
1. Чи існує границя функції в точці x_0 (див. рисунок):



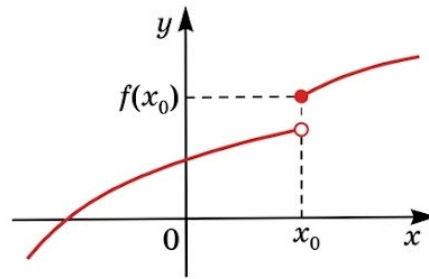
а)



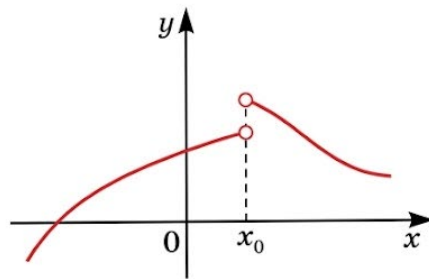
б)



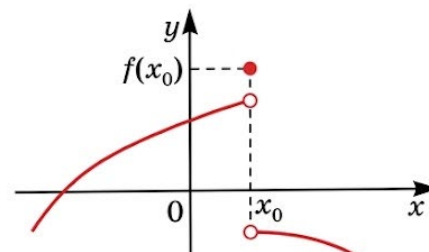
в)



г)



д)



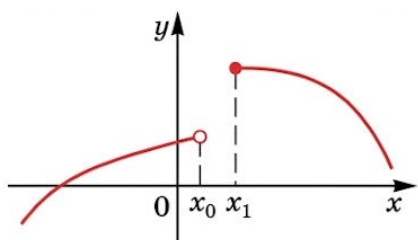
е)

2. За допомогою означення границі функції в точці доведіть, що $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 5) = 7$.
3. Побудуйте графік функції $f(x)$ та укажіть (без доведення), чи має функція f границю в точці a :
- 1) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, $a = 1$;
 - 2) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, $a = 2$;
 - 3) $f(x) = x + 2$, $a = 1$;
 - 4) $f(x) = x + 2$, $a = 1$.
4. Обчисліть границю функції $y = f(x)$ у точці $a = 0$, якщо:
- 1) $f(x) = x - 5$;
 - 2) $f(x) = x^2 - x + 7$;
 - 3) $f(x) = \sqrt{2x + 1}$;
 - 4) $f(x) = 3x^2 - x$;
 - 5) $f(x) = \frac{x}{x + 7}$;
 - 6) $f(x) = \frac{7}{x + 7}$.

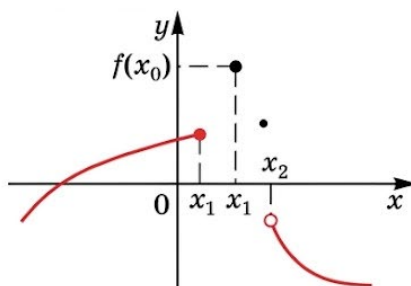
5. Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1, & x \leq 1, \\ x - 4, & x > 1 \end{cases}$ та установіть чи має ця функція границю в точці $x = 1$.
6. Знайдіть $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 1}{x + 1}$.

Рівень В

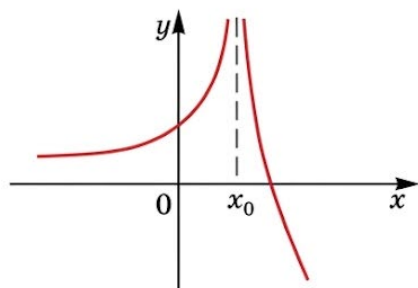
1. Чи існує границя функції в точці x_0 (див. рисунок):



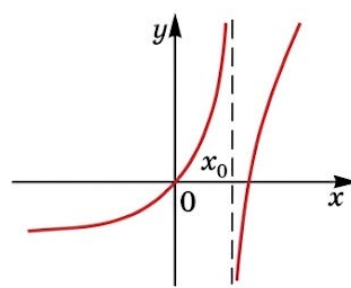
ж)



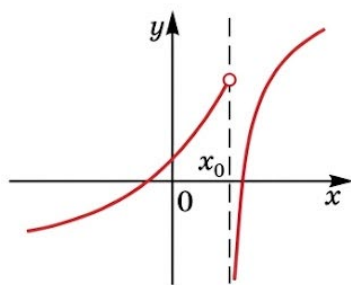
з)



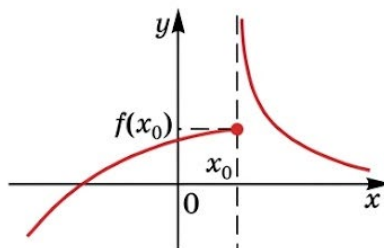
и)



к)



л)



м)

2. Дано функцію $f(x) = \begin{cases} 3, & x \leq -2, \\ x^2 + 1, & -2 < x < 2, \\ \frac{5}{x-1}, & x \geq 2. \end{cases}$ Побудуйте графік цієї функції та установіть чи має функція границю в точках $x = -2$ та $x = 2$.

3. Побудуйте графік функції $f(x)$ та укажіть (без доведення), чи має функція f границю в точці a :

1) $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}, a=2;$

2) $f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}, a=2;$

3) $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}, a=1;$

4) $f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}, a=1.$

4. Обчисліть, користуючись означенням границі функції в точці:

1) $\lim_{x \rightarrow 10} (12x - 30);$

2) $\lim_{x \rightarrow 5} (8 - 3x);$

3) $\lim_{x \rightarrow 5} (2x^2 - 0,5);$

4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1};$

5) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4};$

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4x}{3x + 5x^2}.$

5. За допомогою означення знайдіть границю функції в точці:

1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2};$

2) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6};$

3) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{(x+2)(x-3)};$

4) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x^4 + x^2 - 12}.$

6. Доведіть, що функція $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ не має границі в точці $a = 0$.

7. Доведіть, що функція $f(x) = \frac{1}{x}$ не має границі в точці $a = 0$.

8. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x}.$

9. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 6} \sqrt[4]{3x - 2}.$

10. Доведіть, що $\lim_{x \rightarrow a} (kx + b) = ka + b.$

11. Наведіть приклад такої функції $f(x)$, що $\lim_{x \rightarrow 0} f(-x + 1) = -3.$

12. Знайдіть $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^4 - (1+4x)}{x^2 + x^4}.$

Рівень С

1. Доведіть, що границя многочлена $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ при $x \rightarrow x_0$ дорівнює значенню цього многочлена при $x = x_0$, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0).$

2. Якщо $P(x)$ і $Q(x)$ — многочлени, причому $Q(x_0) \neq 0$, то границя дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}$ при

$x \rightarrow x_0$ дорівнює його значенню при $x = x_0$, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$ Доведіть.

3. За допомогою означення знайдіть границю функції в точці:

1) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49};$

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+3x} - 2}{\sqrt{x} - 1};$

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - \sqrt{2x+2}}{x^2 - 4x + 3};$

4) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}.$

4. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$.
5. Доведіть, що функція Діріхле $\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ не має границі в жодній точці.
6. Функція f визначена на $\mathbb{R}$ і $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. Знайдіть границю $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{x}{3}\right)$.
7. **Творче завдання.** Напишіть програму, яка ілюструє означення границі в точці за Гейне.

IX. Рефлексія (2 хв)

1. Я вмію за графічною ілюстрацією функції встановлювати чи має функція границю функції у заданих точках.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
2. Я знаю означення границі функції в точці за Гейне.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
3. Я вмію наводити приклади функцій, які не мають границі в певних точках.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
4. Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----

Можливі теми проєктів

1. Перевірка існування границі функції в точці за допомогою різних послідовностей.
2. Дослідження границі функції з коливаннями поблизу заданих точок.
3. Прикладні задачі, що приводять до поняття границі функції в точці.
4. Типові помилки при знаходженні границь функції в точці за Гейне.
5. Контрприклад як інструмент дослідження границі функції в точці.