

11

Тема 1.

Границя та неперервність функції

Урок 20. Асимптоти графіка функції

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

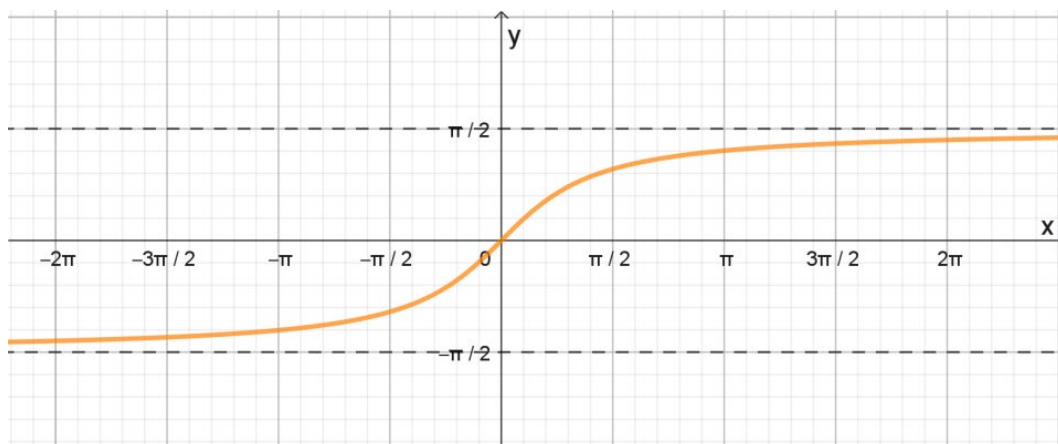
- 1) вивчите означення горизонтальної, вертикальної та похилої асимптот;
- 2) вивчите теорему про коефіцієнт k та параметр b похилої асимптоти $y = kx + b$;
- 3) вивчите алгоритм пошуку асимптот графіка функції;
- 4) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Відомо, що $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -2$, $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 5$. Обчисліть $\lim_{x \rightarrow 3} (4f(x) - 2g(x))$.
2. Укажіть проміжки неперервності функції $f(x) = \frac{2x + 5}{x^2 + 2x}$.
3. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x^2 + 4x}$.
4. Обчисліть границю послідовності $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 7n}}{n - 5}$.
5. Чи має рівняння $x^3 - x + \frac{2}{9} = 0$ корені на відрізку $[0; 1]$?

III. Означення горизонтальної асимптоти графіка функції

Розглянемо графік функції $y = \operatorname{arctg} x$ (див. рисунок).

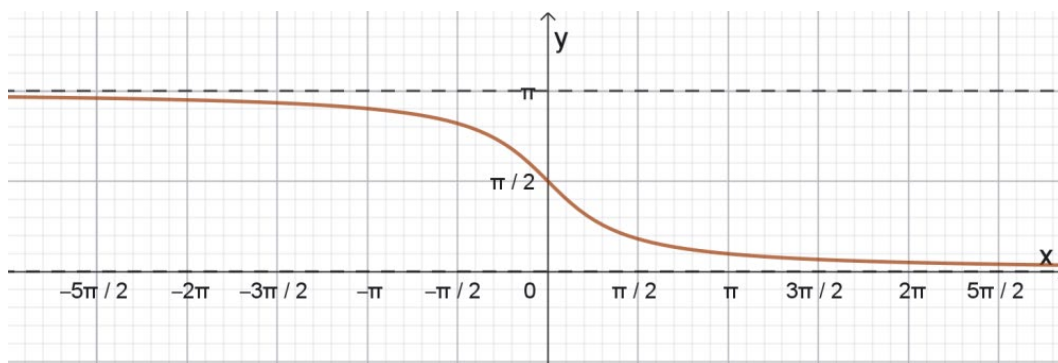


Нехай $A(x; y)$ — довільна точка графіка функції $y = \operatorname{arctg} x$. Оскільки $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, то при $x \rightarrow +\infty$ відстань від точки M до прямої $y = \frac{\pi}{2}$ прямує до нуля. Говорять, що пряма $y = \frac{\pi}{2}$ є горизонтальною асимптотою графіка функції $y = \operatorname{arctg} x$ при $x \rightarrow +\infty$. Також, пряма $y = -\frac{\pi}{2}$ є горизонтальною асимптотою графіка функції $y = \operatorname{arctg} x$ при $x \rightarrow -\infty$.

Означення. Пряму $y = a$ називають **горизонтальною асимптотою** графіка функції f при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$), якщо $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$, $\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a \right)$.

Приклад 1. Побудуйте графік функції $f(x) = \operatorname{arcsctg} x$ та укажіть рівняння його горизонтальних асимптот.

Розв'язання.



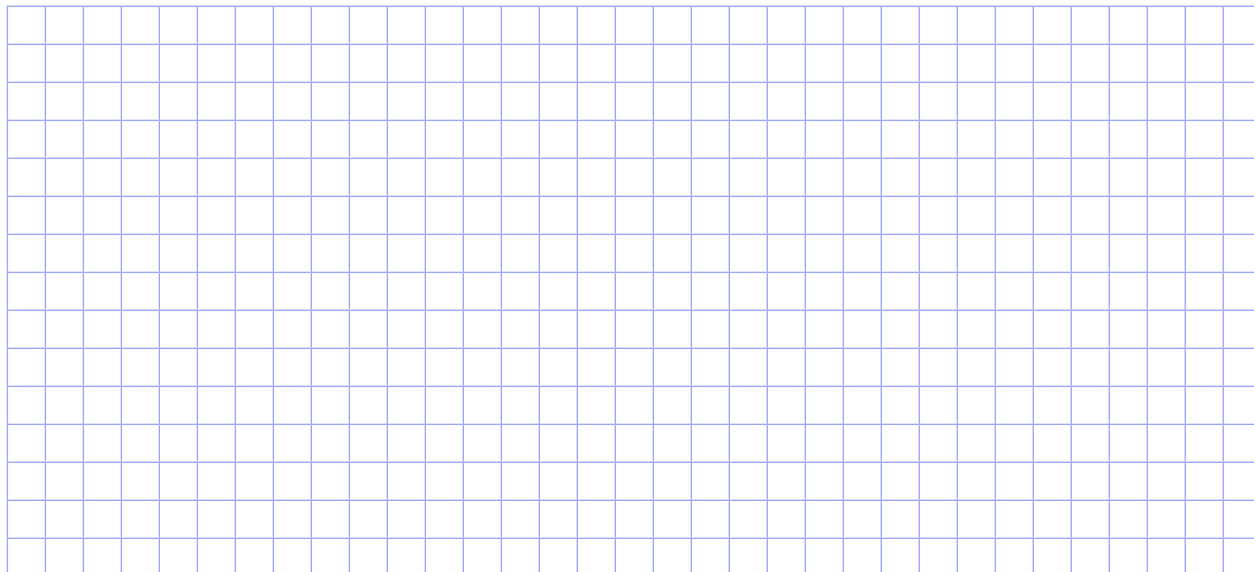
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arcsctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arcsctg} x = \pi.$$

$y = \frac{\pi}{2}$ та $y = \pi$ — рівняння горизонтальних асимптот.

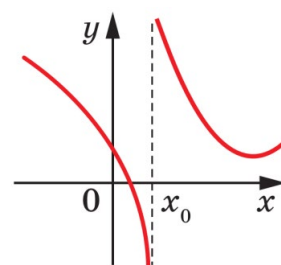
Відповідь. $y = \frac{\pi}{2}$; $y = \pi$.

Приклад 2. Побудуйте графік функції $y = 2 - \frac{3}{x}$ та запишіть рівняння горизонтальних асимптот.



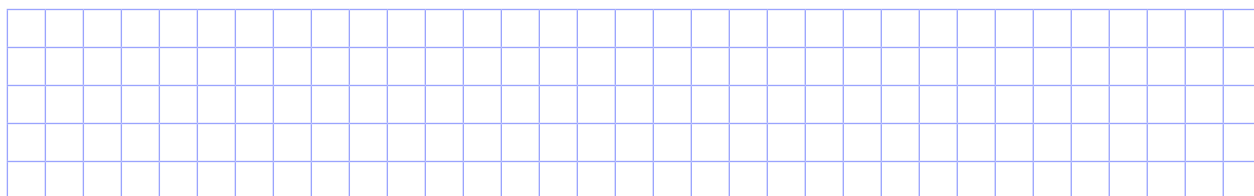
IV. Означення вертикальної асимптоти графіка функції

На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$. Розглянемо функцію $f(x)$ при $x > x_0$. Якщо такі значення аргументу x обирати все ближче й ближче до точки x_0 , то відповідні значення функції стають усе більшими й більшими і можуть стати більшими від будь-якого наперед заданого додатного числа. Іншими словами, якщо послідовність x_n аргументів функції $f(x)$ задовольняє умови $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ і $x_n > x_0$, де $n \in \mathbb{N}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty$. Цей факт записують так: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$. У цьому випадку пряму $x = x_0$ називають **вертикальною асимптотою** графіка функції $f(x)$, якщо x прямує до x_0 справа.



Міркуючи аналогічно, можна сказати, що $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$. Тому пряма $x = x_0$ є вертикальною асимптотою графіка функції $f(x)$, коли x прямує до x_0 зліва.

Приклад 3. Укажіть вертикальні асимптоти графіка функції $f(x) = \frac{1}{x-2}$.



Приклад 4. Укажіть вертикальні асимптоти графіка функції $f(x) = \frac{1}{\arccos x}$.

Розв'язання. Областю визначення даної функції є множина $D(f) = [-1; 1)$

Якщо $x = 1$, то: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\arccos x} = +\infty$ — лівостороння границя.

Правосторонньої границі функція $f(x)$ в точці $x = 1$ не має.

Пряма $x = 1$ є вертикальною асимптотою графіка функції $f(x) = \frac{1}{\arccos x}$.

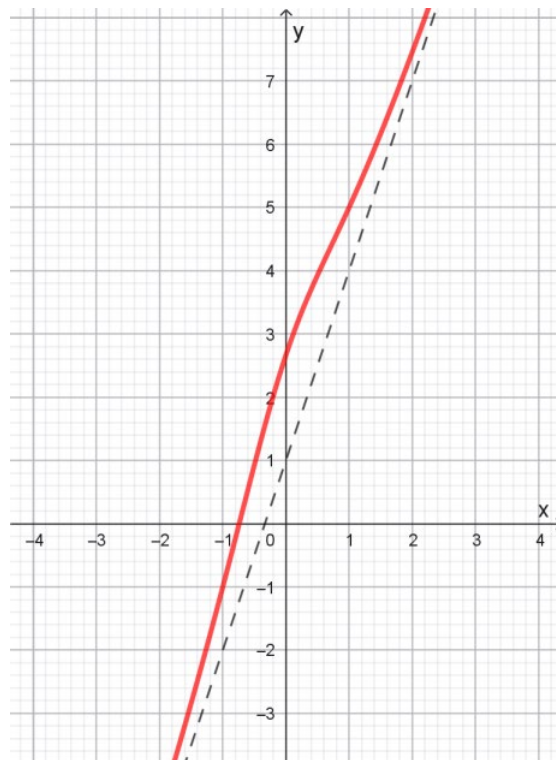
Відповідь. $x = 1$.

V. Означення похилої асимптоти графіка функції (5 хв)

Розглянемо функцію $f(x) = 3x + 1 + \frac{5}{2x^2 + 3}$. Очевидно, що при $x \rightarrow +\infty$ значення функції $f(x)$ все менше і менше відрізняються від відповідних значень лінійної функції $y = 3x + 1$, тобто $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (3x + 1)) = 0$ (див. рисунок).

Це означає, що при $x \rightarrow +\infty$ відстань від точки графіка функції $f(x)$ до відповідної точки прямої $y = 3x + 1$ прямує до нуля.

Тоді пряма $y = 3x + 1$ є похилою асимптотою графіка функції $f(x) = 3x + 1 + \frac{5}{2x^2 + 3}$ при $x \rightarrow +\infty$. Також пряма $y = 3x + 1$ є похилою асимптотою графіка функції $f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$.



Означення. Пряму $y = kx + b$ називають **похилою асимптотою** графіка функції $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$), якщо $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx - b) = 0$).

Примітка. Якщо в рівнянні $y = kx + b$ похилої асимптоти $k = 0$, то з означення випливає рівність $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - b) = 0$. Звідси $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$. Тому пряма $y = b$ є горизонтальною асимптотою графіка функції f при $x \rightarrow +\infty$. Таким чином, горизонтальну асимптоту можна розглядати як окремий випадок похилої асимптоти.

Приклад 5. Укажіть похилу асимптоту графіка функції $f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 2}$.

Розв'язання. $f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 2} = \frac{x^4 - 2x + 2x}{x^3 - 2} = \frac{x^4 - 2x}{x^3 - 2} + \frac{2x}{x^3 - 2} = x + \frac{2x}{x^3 - 2}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^3 - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x^3}}{1 - \frac{2}{x^3}} = 0.$$

Це означає, що при $x \rightarrow +\infty$ відстань від точки графіка функції f до відповідної точки прямої $y = x$ прямує до нуля. Тому пряма $y = x$ є похилою асимптотою графіка функції $f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 2}$.

Відповідь. $y = x$.

VI. Теорема про коефіцієнт k та параметр b похилої асимптоти $y = kx + b$

Як було показано вище пряма $y = 3x + 1$ є похилою асимптотою графіка функції $f(x) = 3x + 1 + \frac{5}{2x^2 + 3}$, але, якщо цю функцію подати у вигляді $f(x) = \frac{6x^3 + 2x^2 + 3x + 8}{2x^2 + 3}$, тоді знайти рівняння асимптоти стає набагато важче. Тому на допомогу приходить наступна теорема.

Теорема. Пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою графіка функції f при $x \rightarrow +\infty$ тоді і тільки тоді, коли виконуються рівності:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b.$$

Доведення. Нехай числа k і b дані рівності. Доведемо, що пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою графіка функції f .

Маємо: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) - \lim_{x \rightarrow +\infty} b = b - b = 0$.

Це означає, що пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою графіка функції $f(x)$.

Нехай пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою графіка функції $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$. Тоді $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0$. Звідси $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b$. Крім цього, маємо:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx + (f(x) - kx)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} k + \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = k + b \cdot 0 = k.$$

Приклад 6. Запишіть рівняння похилої асимптоти графіка функції $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$.

Розв'язання. Нехай шукане рівняння похилої асимптоти має вигляд $y = kx + b$.

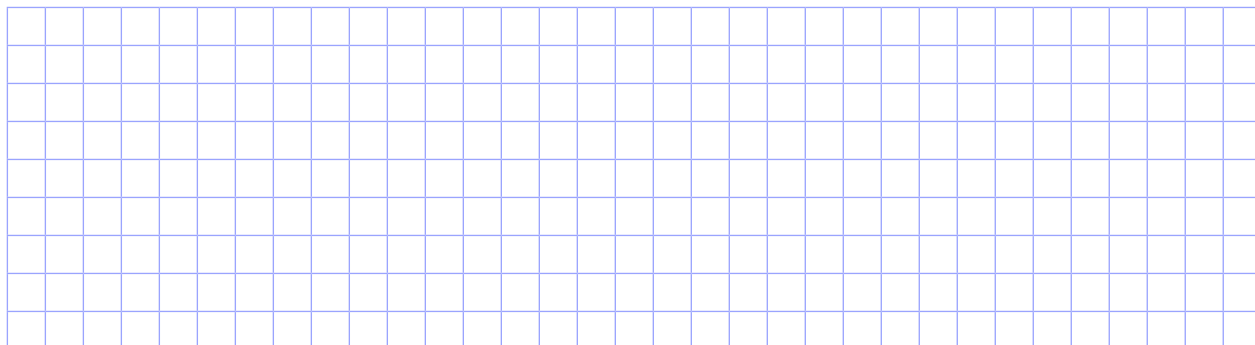
$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2 + 3x}{x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 1.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 3x}{x + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 3x - x^2 - x}{x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{x}} = 2.$$

Отже, $y = x + 2$ — рівняння похилої асимптоти функції $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$.

Відповідь. $y = x + 2$.

Приклад 7. Запишіть рівняння похилої асимптоти графіка функції $f(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 + 1}{x^2 + 1}$.



VII. Схема пошуку асимптот графіка функції

Загальний алгоритм пошуку асимптот графіка функції $f(x)$

1) Знаходимо число k , де $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Якщо цієї границі не існує, то графік функції

$f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ не має похилих і горизонтальних асимптот.

2) Знаходимо число b , де $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx)$. Якщо цієї границі не існує, то графік

функції $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ не має похилої асимптоти.

3) $y = kx + b$ є похилою асимптотою.

Якщо $k = 0$, то $y = b$ — горизонтальна асимптота.

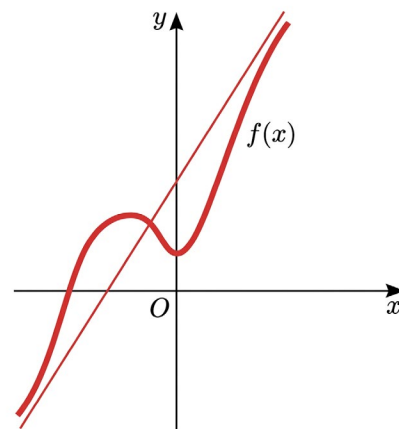
4) Повторити пункти 1) – 3), при $x \rightarrow -\infty$.

5) Якщо x_0 точка розриву, то знаходимо $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ та

$\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$. Якщо ці границі дорівнюють $+\infty$ чи $-\infty$, то $x = x_0$

— вертикальна асимптота.

Примітка. Існує поширене хибне переконання, що графік функції не перетинає асимптоти цієї функції, однак це не так (див. рисунок).



Приклад 8. Дослідіть функцію $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ на асимптоти.

Розв'язання. Нехай $y = k_1x + b_1$ — похила асимптота при $x \rightarrow +\infty$, а $y = k_2x + b_2$ — похила асимптота при $x \rightarrow -\infty$.

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{2}{x}} = 1,$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt{1 - \frac{2}{x}} + 1} = -1,$$

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1 - \frac{2}{x}} \right) = -1,$$

$$b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{-\sqrt{1 - \frac{2}{x}} - 1} = 1.$$

Отже, пряма $y = x - 1$ є похилою асимптотою при $x \rightarrow +\infty$, пряма $y = -x + 1$ є похилою асимптотою при $x \rightarrow -\infty$.

Функція неперервна на своїй області визначення, тому вертикальних асимптот функція не має.

Відповідь. $y = x - 1$, $y = -x + 1$.

VIII. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Логістична компанія досліджує залежність загальних витрат на доставку товарів $C(x)$ (у гривнях) від кількості доставок x . Відомо, що ця залежність описується функцією $C(x) = \frac{15x^2 + 2000x + 3000}{x}$. Знайдіть похилу асимптоту графіка функції $C(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ та поясніть економічний зміст знайденої асимптоти.

Розв'язання. Нехай $y = kx + b$ — шукана похила асимптота.

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{C(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{15x^2 + 2000x + 3000}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{15x^2 + 2000x + 3000}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{15 + \frac{2000}{x} + \frac{3000}{x^2}}{1} = 15.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (C(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{15x^2 + 2000x + 3000}{x} - 15x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{15x^2 + 2000x + 3000 - 15x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2000x + 3000}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2000 + \frac{3000}{x}}{1} = 2000.$$

Отже, $y = 15x + 2000$ — рівняння похилої асимптоти функції

$$C(x) = \frac{15x^2 + 2000x + 3000}{x}.$$

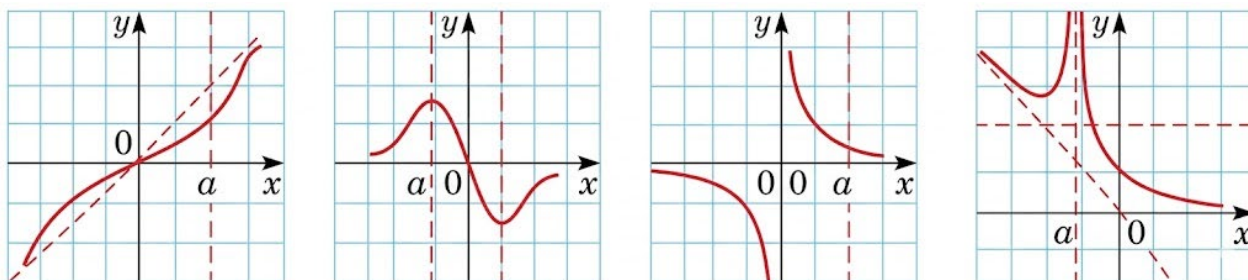
Пряма $y = 15x + 2000$ описує ситуацію, коли кількість доставок велика, а початкові організаційні витрати вже не впливають на загальну картину.

Відповідь. $y = 15x + 2000$.

ІХ. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. На рисунку зображено графіки функцій.



За рисунком установіть:

- 1) Який із графіків має вертикальну, горизонтальну, похилу асимптоту?
- 2) Яка із функцій має границю при: $x \rightarrow a$, $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$?

2. Дослідіть функцію на асимптоти:

1) $y = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$;

2) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$.

3. Укажіть вертикальні асимптоти:

1) $f(x) = \frac{3}{x + 1}$;

2) $f(x) = \frac{1}{|x|}$.

4. Знайдіть горизонтальні асимптоти:

1) $y = \frac{3x + 5}{4x - 1}$;

2) $y = \frac{2 - x}{3x + 2}$.

5. Знайдіть похилі асимптоти:

1) $f(x) = x + \frac{1}{x}$;

2) $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x - 1}$.

6. Дослідіть функцію на асимптоти:

1) $y = \frac{2}{(x - 2)(x - 1)}$;

2) $y = \frac{3x + 5}{x + 3}$;

3) $y = \frac{3x}{5(x + 2)}$;

4) $y = \frac{9 - 2x}{x - 3}$.

Рівень В

1. Укажіть вертикальні асимптоти:

1) $f(x) = \frac{1}{\cos x}$;

2) $f(x) = \frac{1}{\arcsin x}$.

2. Дослідіть функцію $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$ на асимптоти.

3. Знайдіть похилі асимптоти:

1) $f(x) = \frac{(2 - x)^3}{(x - 3)^2}$;

2) $f(x) = \frac{x^4 - 8}{(x + 1)^4}$.

4. Дослідіть функцію $y = \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{3x + 2}$ на асимптоти.

5. Знайдіть асимптоти графіка функції $y = \sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3}$.

6. Знайдіть асимптоти графіка функції $f(x) = \sqrt{x^2 + x} + 2x$.
7. Дослідіть функцію $y = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$ на асимптоти.
8. Дослідіть функцію $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ на асимптоти.
9. Дослідіть функцію $y = \frac{3x^3 + 6}{2x^3 + 4x + 5}$ на горизонтальні і похилі асимптоти.
10. Дослідіть функцію $y = \frac{4x^3 - x^2 + 1}{x^2 + x + 8}$ на горизонтальні і похилі асимптоти.
11. Дослідіть функцію $y = \frac{(x+1)\operatorname{arctg} x}{x}$ на асимптоти.
12. Дослідіть функцію $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ на асимптоти.

Рівень С

1. Графік функції $f(x)$ має асимптоту. Чи може бути так, що графік функції $f(x)$ перетинає асимптоту нескінченну кількість разів?
2. Зростаюча функція $f(x)$ така, що $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0$. Чи обов'язково графік функції $f(x)$ має горизонтальну асимптоту при $x \rightarrow +\infty$?
3. Про функцію f відомо, що $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$. Чи обов'язково пряма $x = x_0$ є вертикальною асимптотою її графіка?
4. Графіки функцій $f(x)$ і $g(x)$ є рівними фігурами. Чи обов'язково графік функції $g(x)$ має асимптоту, якщо графік функції $f(x)$ має асимптоту?
5. Дослідіть функцію $y = \frac{x^5 - 4x - 3}{x^4 - 3x^3 + 4}$ на горизонтальні і похилі асимптоти.
6. Чи може функція мати одночасно горизонтальну і похилу асимптоти при $x \rightarrow +\infty$? Чи може вона мати горизонтальну асимптоту при $x \rightarrow +\infty$ і похилу асимптоту при $x \rightarrow -\infty$? Наведіть приклади.
7. **Творче завдання.** Запрограмуйте алгоритм пошуку асимптот графіка функції.

Рефлексія

- | | | |
|---|------------------------|----|
| 1. Я знаю означення горизонтальної асимптоти графіка функції. | | |
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. Я знаю означення вертикальної асимптоти графіка функції. | | |
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. Я знаю, що таке похила асимптота графіка функції. | | |
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |

- 4.** Я вивчив/вивчила теорему про коефіцієнт k та параметр b похилої асимптоти $y = kx + b$.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|
- 5.** Я знаю алгоритм пошуку асимптот графіка функції.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|
- 6.** Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|

Можливі теми проєктів

1. Горизонтальні, вертикальні та похилі асимптоти: геометричний зміст і приклади.
2. Дослідження асимптот раціональних функцій залежно від степенів чисельника і знаменника.
3. Фізичний зміст горизонтальної асимптоти (швидкість, температура, напруга).
4. Економічні процеси та асимптотична поведінка функцій (витрати, прибуток).
5. Асимптоти як модель процесів, що наближаються до граничного значення.





