

Урок 20. Асимптоти графіка функції**Тип уроку:** урок засвоєння нових знань.**План уроку**

1. Означення горизонтальної асимптоти графіка функції.
2. Означення вертикальної асимптоти графіка функції.
3. Означення похилої асимптоти графіка функції.
4. Теорема про коефіцієнт k та параметр b похилої асимптоти $y = kx + b$.
5. Схема пошуку асимптот графіка функції.

Очікувані результати навчальних досягнень**Учень/учениця:**

визначає компоненти математичної моделі специфічної проблемної ситуації, їх достатність і взаємозв'язки між ними [12 МАО 2.3.1–1 П];

визначає, яких даних недостатньо чи є надлишкові дані, під час розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2–1 П];

добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1–1 П];

реалізовує визначену послідовність дій для розв'язання специфічних

проблемних ситуацій, перевіряє та досліджує отримані результати [12 МАО 4.2.1–2 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.

- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.
- 6) Обов'язково пропонуйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.
- 7) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.
- 9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) У яких реальних процесах важливо знати межу, до якої наближається величина, але яку вона ніколи не досягає?
- 2) Чи може одна функція мати кілька «напрямних» прямих, які описують її поведінку?
- 3) Чи допомагають асимптоти уникнути помилок при побудові графіків функцій?
- 4) Яку роль відіграють границі у визначенні асимптот і чи пов'язані вертикальні асимптоти з точками розриву функції?
- 5) Чи може асимптота перетинати графік функції?

II. Повторення (Усно) (3–4 хв)

1. Відомо, що $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -2$, $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 5$. Обчисліть $\lim_{x \rightarrow 3} (4f(x) - 2g(x))$.
Відповідь. -18 .
2. Укажіть проміжки неперервності функції $f(x) = \frac{2x + 5}{x^2 + 2x}$.
Відповідь. $(-\infty; -2)$ і $(0; +\infty)$.
3. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x^2 + 4x}$.
Відповідь. $\frac{3}{4}$.
4. Обчисліть границю послідовності $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 7n}}{n - 5}$.
Відповідь. 0 .

5. Чи має рівняння $x^3 - x + \frac{2}{9} = 0$ корені на відрізку $[0; 1]$?

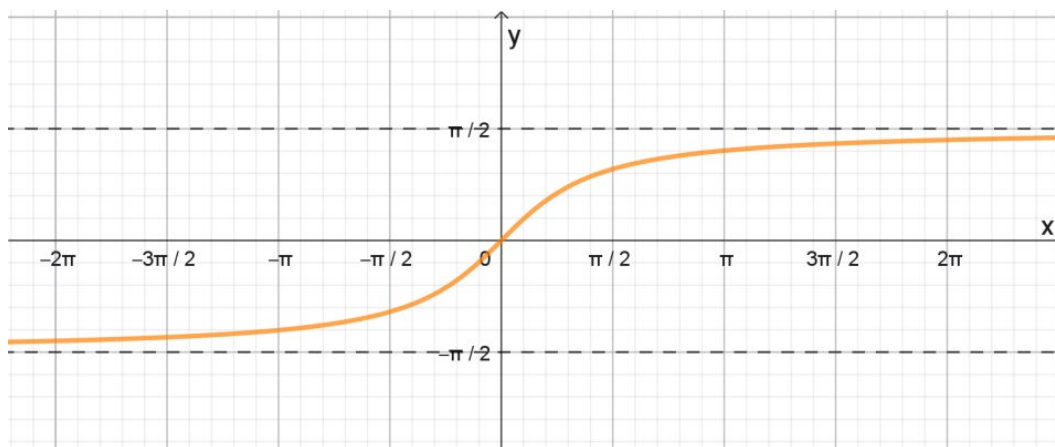
Відповідь. Ні.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Логістична компанія досліджує залежність загальних витрат на доставку товарів $C(x)$ (у гривнях) від кількості доставок x . Відомо, що ця залежність описується функцією $C(x) = \frac{15x^2 + 2000x + 3000}{x}$. Знайдіть похилу асимптоту графіка функції $C(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ та поясніть економічний зміст знайденої асимптоти.

III. Означення горизонтальної асимптоти графіка функції

Розглянемо графік функції $y = \arctg x$ (див. рисунок).



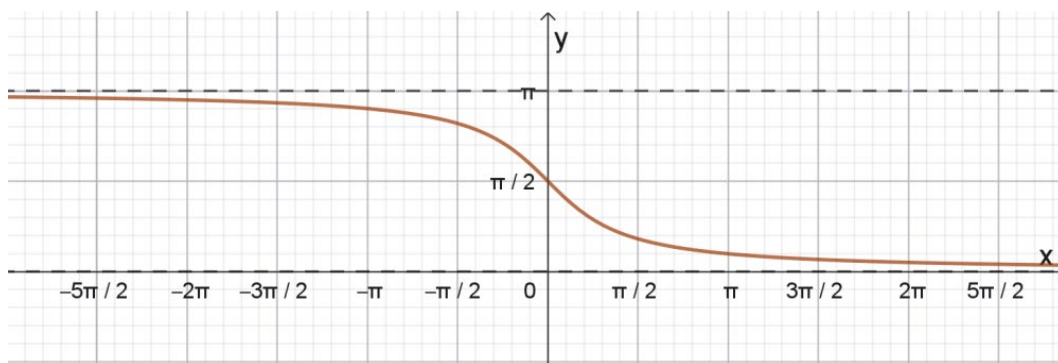
Нехай $A(x; y)$ — довільна точка графіка функції $y = \arctg x$. Оскільки $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}$, то при $x \rightarrow +\infty$ відстань від точки M до прямої $y = \frac{\pi}{2}$ прямує до нуля. Говорять, що пряма $y = \frac{\pi}{2}$ є горизонтальною асимптотою графіка функції $y = \arctg x$ при $x \rightarrow +\infty$. Також, пряма $y = -\frac{\pi}{2}$ є горизонтальною асимптотою графіка функції $y = \arctg x$ при $x \rightarrow -\infty$.

Означення. Пряму $y = a$ називають **горизонтальною асимптотою** графіка функції f при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$), якщо $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$, $\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a \right)$.

Ілюстративні приклади (3–5 хв)

6. Побудуйте графік функції $f(x) = \arctg x$ та укажіть рівняння його горизонтальних асимптот.

Розв'язання.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = 0.$$

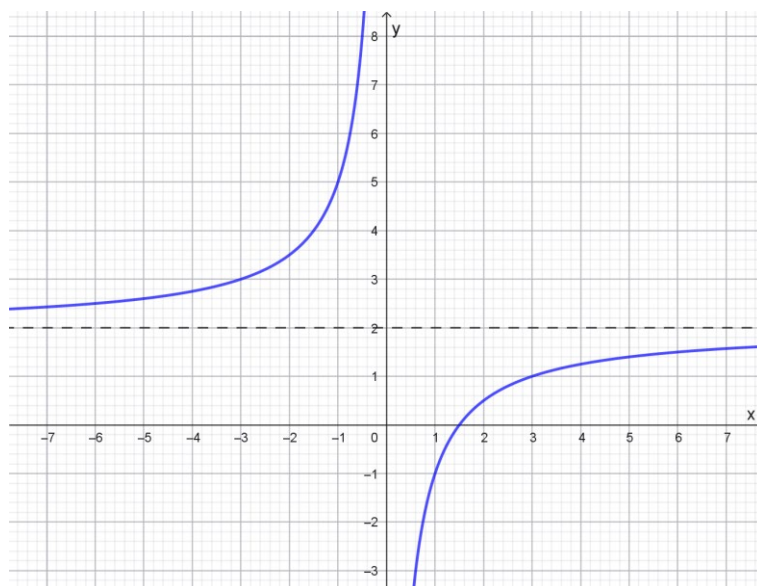
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = \pi.$$

$y = 0$ та $y = \pi$ — рівняння горизонтальних асимптот.

Відповідь. $y = 0$; $y = \pi$.

7. Побудуйте графік функції $y = 2 - \frac{3}{x}$ та запишіть рівняння горизонтальних асимптот.

Розв'язання.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{3}{x} \right) = 2,$$

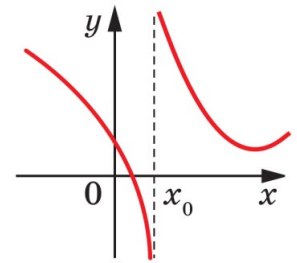
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{3}{x} \right) = 2.$$

$y = 2$ — горизонтальна асимптота.

Відповідь. $y = 2$.

IV. Означення вертикальної асимптоти графіка функції

На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$. Розглянемо функцію $f(x)$ при $x > x_0$. Якщо такі значення аргументу x обирати все ближче й ближче до точки x_0 , то відповідні значення функції стають усе більшими й більшими і можуть стати більшими від будь-якого наперед заданого додатного числа. Іншими словами, якщо послідовність x_n аргументів функції $f(x)$ задовольняє умови $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ і $x_n > x_0$, де $n \in \mathbb{N}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty$. Цей факт записують так: $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = +\infty$. У цьому випадку пряму $x = x_0$ називають **вертикальною асимптотою** графіка функції $f(x)$, якщо x прямує до x_0 справа.



Міркуючи аналогічно, можна сказати, що $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = -\infty$. Тому пряма $x = x_0$ є вертикальною асимптотою графіка функції $f(x)$, коли x прямує до x_0 зліва.

Ілюстративні приклади (5 хв)

8. Укажіть вертикальні асимптоти графіка функції $f(x) = \frac{1}{x-2}$.

Розв'язання. В усіх точках, крім $x = 2$ дана функція є неперервною, тому в цих точках функція не має вертикальних асимптот.

Розглянемо функцію при $x = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{1}{x-2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{1}{x-2} = -\infty.$$

Пряма $x = 2$ є вертикальною асимптотою графіка функції $f(x) = \frac{1}{x-2}$.

Відповідь. $x = 2$.

9. Укажіть вертикальні асимптоти графіка функції $f(x) = \frac{1}{\arccos x}$.

Розв'язання. Областю визначення даної функції є множина $D(f) = [-1; 1)$

Якщо $x = 1$, то: $\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{1}{\arccos x} = +\infty$ — лівостороння границя.

Правосторонньої границі функція $f(x)$ в точці $x = 1$ не має.

Пряма $x = 1$ є вертикальною асимптотою графіка функції $f(x) = \frac{1}{\arccos x}$.

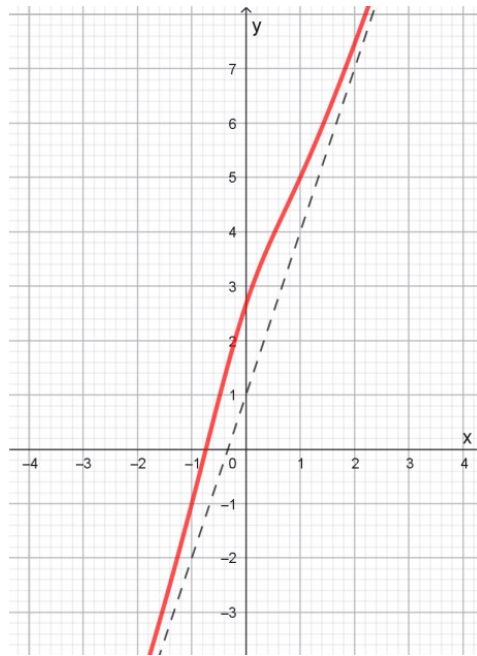
Відповідь. $x = 1$.

V. Означення похилої асимптоти графіка функції (5 хв)

Розглянемо функцію $f(x) = 3x + 1 + \frac{5}{2x^2 + 3}$. Очевидно, що при $x \rightarrow +\infty$ значення функції $f(x)$ все менше і менше відрізняються від відповідних значень лінійної функції $y = 3x + 1$, тобто $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (3x + 1)) = 0$ (див. рисунок).

Це означає, що при $x \rightarrow +\infty$ відстань від точки графіка функції $f(x)$ до відповідної точки прямої $y = 3x + 1$ прямує до нуля.

Тоді пряма $y = 3x + 1$ є похилою асимптотою графіка функції $f(x) = 3x + 1 + \frac{5}{2x^2 + 3}$ при $x \rightarrow +\infty$. Також пряма $y = 3x + 1$ є похилою асимптотою графіка функції $f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$.



Означення. Пряму $y = kx + b$ називають *похилою асимптотою* графіка функції $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$), якщо $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx - b) = 0$).

Примітка. Якщо в рівнянні $y = kx + b$ похилої асимптоти $k = 0$, то з означення випливає рівність $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - b) = 0$. Звідси $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$. Тому пряма $y = b$ є горизонтальною асимптотою графіка функції f при $x \rightarrow +\infty$. Таким чином, горизонтальну асимптоту можна розглядати як окремий випадок похилої асимптоти.

Ілюстративний приклад

10. Укажіть похилу асимптоту графіка функції $f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 2}$.

Розв'язання. $f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 2} = \frac{x^4 - 2x + 2x}{x^3 - 2} = \frac{x^4 - 2x}{x^3 - 2} + \frac{2x}{x^3 - 2} = x + \frac{2x}{x^3 - 2}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^3 - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x^2}}{1 - \frac{2}{x^3}} = 0.$$

Це означає, що при $x \rightarrow +\infty$ відстань від точки графіка функції f до відповідної точки прямої $y = x$ прямує до нуля. Тому пряма $y = x$ є похилою асимптотою графіка функції $f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 2}$.

Відповідь. $y = x$.

VI. Теорема про коефіцієнт k та параметр b похилої асимптоти

$$y = kx + b$$

Як було показано вище пряма $y = 3x + 1$ є похилою асимптотою графіка функції $f(x) = 3x + 1 + \frac{5}{2x^2 + 3}$, але, якщо цю функцію подати у вигляді $f(x) = \frac{6x^3 + 2x^2 + 3x + 8}{2x^2 + 3}$, тоді знайти рівняння асимптоти стає набагато важче. Тому на допомогу приходить наступна теорема.

Теорема. Пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою графіка функції f при $x \rightarrow +\infty$ тоді і тільки тоді, коли виконуються рівності:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b.$$

Доведення. Нехай числа k і b дані рівності. Доведемо, що пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою графіка функції f .

$$\text{Маємо: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) - \lim_{x \rightarrow +\infty} b = b - b = 0.$$

Це означає, що пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою графіка функції $f(x)$.

Нехай пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою графіка функції $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$. Тоді $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0$. Звідси $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b$. Крім цього, маємо:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx + (f(x) - kx)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} k + \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = k + b \cdot 0 = k.$$

Ілюстративні приклади (5 хв)

- 11.** Запишіть рівняння похилої асимптоти графіка функції $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$.

Розв'язання. Нехай шукане рівняння похилої асимптоти має вигляд $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2 + 3x}{x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 1.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 3x}{x + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 3x - x^2 - x}{x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{x}} = 2.$$

Отже, $y = x + 2$ — рівняння похилої асимптоти функції $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$.

Відповідь. $y = x + 2$.

- 12.** Запишіть рівняння похилої асимптоти графіка функції $f(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 + 1}{x^2 + 1}$.

Розв'язання. Нехай шукане рівняння похилої асимптоти має вигляд $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x^3 + 5x^2 + 1}{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 5x^2 + 1}{x^3 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 2.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^3 + 5x^2 + 1}{x^2 + 1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^3 + 5x^2 + 1 - 2x^3 - 2x}{x^2 + 1} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 5.$$

Отже, $y = 2x + 5$ — рівняння похилої асимптоти функції $f(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 + 1}{x^2 + 1}$.

Відповідь. $y = 2x + 5$.

VII. Схема пошуку асимптот графіка функції (5 хв)

Загальний алгоритм пошуку асимптот графіка функції $f(x)$

1) Знаходимо число k , де $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Якщо цієї границі не існує, то графік функції

$f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ не має похилих і горизонтальних асимптот.

2) Знаходимо число b , де $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx)$. Якщо цієї границі не існує, то графік

функції $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ не має похилої асимптоти.

3) $y = kx + b$ є похилою асимптотою.

Якщо $k = 0$, то $y = b$ — горизонтальна асимптота.

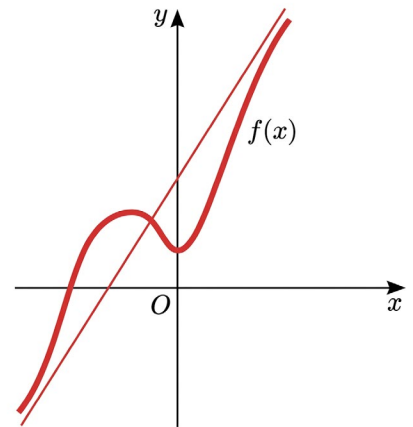
4) Повторити пункти 1) – 3), при $x \rightarrow -\infty$.

5) Якщо x_0 точка розриву, то знаходимо $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ та

$\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$. Якщо ці границі дорівнюють $+\infty$ чи $-\infty$, то $x = x_0$

— вертикальна асимптота.

Примітка. Існує поширене хибне переконання, що графік функції не перетинає асимптоти цієї функції, однак це не так (див. рисунок).



Ілюстративні приклади (5 хв)

13. Дослідіть функцію $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ на асимптоти.

Розв'язання. Нехай $y = k_1x + b_1$ — похила асимптота при $x \rightarrow +\infty$, а $y = k_2x + b_2$ — похила асимптота при $x \rightarrow -\infty$.

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{2}{x}} = 1,$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt{1 - \frac{2}{x}} + 1} = -1,$$

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1 - \frac{2}{x}} \right) = -1,$$

$$b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{-\sqrt{1 - \frac{2}{x}} - 1} = 1.$$

Отже, пряма $y = x - 1$ є похилою асимптотою при $x \rightarrow +\infty$, пряма $y = -x + 1$ є похилою асимптотою при $x \rightarrow -\infty$.

Функція неперервна на своїй області визначення, тому вертикальних асимптот функція не має.

Відповідь. $y = x - 1$, $y = -x + 1$.

14. Дослідіть функцію $f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 2}$ на асимптоти.

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, тому похилих асимптот функція не має.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 - x - 2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 - x - 2} = 0.$$

Отже, $y = 0$ – горизонтальна асимптота. $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 2) \cup (2; +\infty)$.

Розглянемо функцію в точці $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x^2 - x - 2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x^2 - x - 2} = -\infty.$$

Розглянемо функцію в точці $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x^2 - x - 2} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x^2 - x - 2} = +\infty.$$

Отже, прямі $x = -1$ та $x = 2$ – вертикальні асимптоти.

Відповідь. $y = x - 1$, $y = -x + 1$.

VIII. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–8 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Логістична компанія досліджує залежність загальних витрат на доставку товарів $C(x)$ (у гривнях) від кількості доставок x . Відомо, що ця залежність описується функцією $C(x) = \frac{15x^2 + 2000x + 3000}{x}$. Знайдіть похилу асимптоту графіка функції $C(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ та поясніть економічний зміст знайденої асимптоти.

Розв'язання. Нехай $y = kx + b$ — шукана похила асимптота.

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{C(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{15x^2 + 2000x + 3000}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{15x^2 + 2000x + 3000}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{15 + \frac{2000}{x} + \frac{3000}{x^2}}{1} = 15.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (C(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{15x^2 + 2000x + 3000}{x} - 15x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{15x^2 + 2000x + 3000 - 15x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2000x + 3000}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2000 + \frac{3000}{x}}{1} = 2000.$$

Отже, $y = 15x + 2000$ — рівняння похилої асимптоти функції

$$C(x) = \frac{15x^2 + 2000x + 3000}{x}.$$

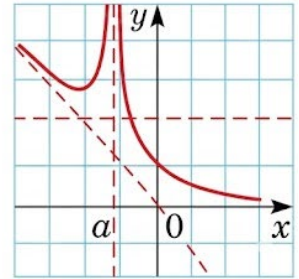
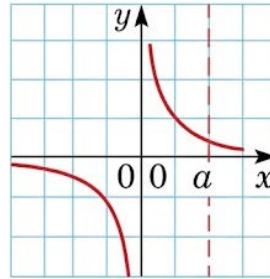
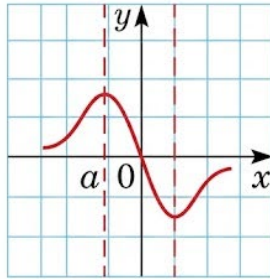
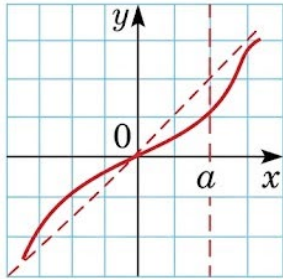
Пряма $y = 15x + 2000$ описує ситуацію, коли кількість доставок велика, а початкові організаційні витрати вже не впливають на загальну картину.

Відповідь. $y = 15x + 2000$.

IX. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (5–10 хв)

Рівень А

1. На рисунку зображено графіки функцій.



За рисунком установіть:

- 1) Який із графіків має вертикальну, горизонтальну, похилу асимптоти?
- 2) Яка із функцій має границю при: $x \rightarrow a$, $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$?

2. Дослідіть функцію на асимптоти:

1) $y = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$;

2) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$.

3. Укажіть вертикальні асимптоти:

1) $f(x) = \frac{3}{x + 1}$;

2) $f(x) = \frac{1}{|x|}$.

4. Знайдіть горизонтальні асимптоти:

1) $y = \frac{3x + 5}{4x - 1}$;

2) $y = \frac{2 - x}{3x + 2}$.

5. Знайдіть похилі асимптоти:

1) $f(x) = x + \frac{1}{x}$;

2) $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x - 1}$.

6. Дослідіть функцію на асимптоти:

1) $y = \frac{2}{(x - 2)(x - 1)}$;

2) $y = \frac{3x + 5}{x + 3}$;

3) $y = \frac{3x}{5(x + 2)}$;

4) $y = \frac{9 - 2x}{x - 3}$.

Рівень В

1. Укажіть вертикальні асимптоти:

1) $f(x) = \frac{1}{\cos x}$;

2) $f(x) = \frac{1}{\arcsin x}$.

2. Дослідіть функцію $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$ на асимптоти.

3. Знайдіть похилі асимптоти:

1) $f(x) = \frac{(2 - x)^3}{(x - 3)^2}$;

2) $f(x) = \frac{x^4 - 8}{(x + 1)^4}$.

4. Дослідіть функцію $y = \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{3x + 2}$ на асимптоти.
5. Знайдіть асимптоти графіка функції $y = \sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3}$.
6. Знайдіть асимптоти графіка функції $f(x) = \sqrt{x^2 + x} + 2x$.
7. Дослідіть функцію $y = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$ на асимптоти.
8. Дослідіть функцію $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ на асимптоти.
9. Дослідіть функцію $y = \frac{3x^3 + 6}{2x^3 + 4x + 5}$ на горизонтальні і похилі асимптоти.
10. Дослідіть функцію $y = \frac{4x^3 - x^2 + 1}{x^2 + x + 8}$ на горизонтальні і похилі асимптоти.
11. Дослідіть функцію $y = \frac{(x+1)\arctg x}{x}$ на асимптоти.
12. Дослідіть функцію $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ на асимптоти.

Рівень С

1. Графік функції $f(x)$ має асимптоту. Чи може бути так, що графік функції $f(x)$ перетинає асимптоту нескінченну кількість разів?
2. Зростаюча функція $f(x)$ така, що $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0$. Чи обов'язково графік функції $f(x)$ має горизонтальну асимптоту при $x \rightarrow +\infty$?
3. Про функцію f відомо, що $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$. Чи обов'язково пряма $x = x_0$ є вертикальною асимптотою її графіка?
4. Графіки функцій $f(x)$ і $g(x)$ є рівними фігурами. Чи обов'язково графік функції $g(x)$ має асимптоту, якщо графік функції $f(x)$ має асимптоту?
5. Дослідіть функцію $y = \frac{x^5 - 4x - 3}{x^4 - 3x^3 + 4}$ на горизонтальні і похилі асимптоти.
6. Чи може функція мати одночасно горизонтальну і похилу асимптоти при $x \rightarrow +\infty$? Чи може вона мати горизонтальну асимптоту при $x \rightarrow +\infty$ і похилу асимптоту при $x \rightarrow -\infty$? Наведіть приклади.
7. **Творче завдання.** Запрограмуйте алгоритм пошуку асимптот графіка функції.

Х. Рефлексія (1 хв)

1. Я знаю означення горизонтальної асимптоти графіка функції.

Так
Ще треба потренуватися
Ні
2. Я знаю означення вертикальної асимптоти графіка функції.

Так
Ще треба потренуватися
Ні

- | | | | |
|-----------|--|------------------------|----|
| 3. | Я знаю, що таке похила асимптота графіка функції. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я вивчив/вивчила теорему про коефіцієнт k та параметр b похилої асимптоти $y = kx + b$. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я знаю алгоритм пошуку асимптот графіка функції. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

- 1.** Горизонтальні, вертикальні та похилі асимптоти: геометричний зміст і приклади.
- 2.** Дослідження асимптот раціональних функцій залежно від степенів чисельника і знаменника.
- 3.** Фізичний зміст горизонтальної асимптоти (швидкість, температура, напруга).
- 4.** Економічні процеси та асимптотична поведінка функцій (витрати, прибуток).
- 5.** Асимптоти як модель процесів, що наближаються до граничного значення.

Список використаних джерел

1) Алгебра : підручн. для 11 кл. з поглибленим вивченням математики : у 2 ч. / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Харків : Гімназія, 2011. Ч. 1. — 256 с. : іл.