

Границя та неперервність функції

Урок 21. Урок–практикум. Обчислення границь функцій при $x \rightarrow \infty$. Знаходження асимптот графіків функцій

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

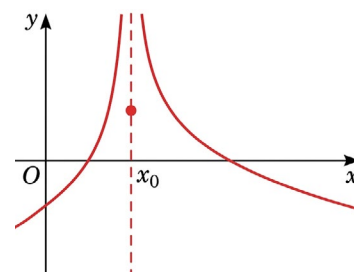
I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) удосконалили навички пошуку границь функцій на нескінченності;
- 2) відпрацюєте алгоритми пошуку вертикальних і горизонтальних асимптот;
- 3) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Знайдіть границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-4}{2x+7}$.
2. Установіть характер точки розриву функції $f(x) = \frac{4-x^2}{2-x}$.
3. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-4x}{3x+5x^2}$.
4. Чому дорівнює границя функції, графік якої зображений на рисунку, в точці x_0 ?
5. Знайдіть границю послідовності $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)(1-2n^2)}{n^3+8}$.



III. Обчислення границь функцій при $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ (5–7 хв)

При обчисленні границь функцій при $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ часто виникають так звані невизначеності виду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ та $[\infty - \infty]$.

1) Розберемо випадок коли функція задана у вигляді раціонального дробу (чисельник і знаменник дробу є многочленами).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}, \quad a_0 \neq 0, \quad b_0 \neq 0.$$

Винесемо за дужки в чисельнику x^n , а в знаменнику x^m . Отримуємо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{n-m} \cdot \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_m}{x^m}}.$$

Границя другого множника дорівнює $\frac{a_0}{b_0}$ і відрізняється від нуля. Якщо $n > m$, то $x^{n-m} \rightarrow \infty$, тобто шукана границя дорівнює нескінченності. Якщо $n = m$, то $x^{n-m} = x^0 = 1$, шукана границя дорівнює $\frac{a_0}{b_0}$. Якщо $n < m$, то $x^{n-m} = \frac{1}{x^{m-n}} \rightarrow 0$. Тоді шукана границя дорівнює нулю.

Іншими словами якщо степінь многочлена у чисельнику більший за степінь многочлена у знаменнику, то границя на нескінченності такого дробу дорівнює нескінченності; якщо степінь многочлена у чисельнику менший за степінь многочлена у знаменнику, то границя на нескінченності такої функції дорівнює 0; якщо ж степені многочленів у чисельнику і знаменнику рівні, то границя такої функції дорівнює частці старших коефіцієнтів чисельника і знаменника.

2) У більш складному випадку коли виникає невизначеність виду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, але чисельник або знаменник містить радикали, то теж можна скористатися методом подібним до того що описаний в 1 пункті: поділити чисельник і знаменник дробу на змінну в найбільшому із степенів, що містяться в чисельнику і знаменнику дробу.

Наприклад,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 - x^2 + 3} + \sqrt[3]{x + 5}}{8x^2 - 3x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{x^4 - x^2 + 3}}{x^2} + \frac{\sqrt[3]{x + 5}}{x^2}}{\frac{8x^2 - 3x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{x^4 - x^2 + 3}{x^4}} + \sqrt[3]{\frac{x + 5}{x^6}}}{\frac{8x^2 - 3x}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4}} + \sqrt[3]{\frac{1}{x^5} + \frac{5}{x^6}}}{8 - \frac{3}{x}} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

3) При обчисленні границь функцій, якщо виникає невизначеність $[\infty - \infty]$, то при відніманні виразів з радикалами є сенс спробувати спочатку позбутися від ірраціональності в чисельнику чи знаменнику дробу.

Наприклад,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - x} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - x} \right) \left(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - x} \right)}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2 + x}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x + 1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - x}}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Приклад 1. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 - x^2 + 3}{3x^4 + 8x^2 - x}$

Розв'язання. Функція задана у вигляді раціонального дробу, причому степінь многочлена у чисельнику дорівнює степеню многочлена у знаменнику, тому

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 - x^2 + 3}{3x^4 + 8x^2 - x} = \frac{7}{3}.$$

Відповідь. $\frac{7}{3}$.

Приклад 2. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 - x^2 + 3x}{9x^4 - 7x^2 - 5}$.

[illegible]

Приклад 3. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^6 + x^5 - 3}{x^4 + 7x^2 - x}$.

[illegible]

Приклад 4. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{32x^5 + 2x - 7} + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt[3]{27x^3 + 6x^2 - 7}}$.

[illegible]

Приклад 5. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{5x^4 + x^2 - 5} + 3x - 7}{\sqrt[4]{4x^5 + 2x - 3} - 2x}$.

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{5x^4 + x^2 - 5} + 3x - 7}{\sqrt[4]{4x^5 + 2x - 3} - 2x} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{5x^4 + x^2 - 5}}{x^3} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{7}{\sqrt[3]{x^4}}}{\frac{\sqrt[4]{4x^5 + 2x - 3}}{x^{\frac{4}{3}}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{5 + \frac{1}{x^2} - \frac{5}{x^4}} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{7}{\sqrt[3]{x^4}}}{\sqrt[12]{\left(4 + \frac{2}{x^4} - \frac{3}{x^5}\right)^3} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[12]{\frac{4}{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[12]{x}}{\sqrt[12]{4}} = \infty. \end{aligned}$$

Відповідь. ∞ .

IV. Знаходження горизонтальних та вертикальних асимптот графіків функцій

Пряма $x = a$ буде вертикальною асимптотою графіка функції $y = f(x)$, якщо виконуються хоча б одна із умов: $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = -\infty$.

Вертикальна асимптота $x = a$ може бути в точці a , якщо точка a обмежує відкриті (або напіввідкриті) проміжки області визначення даної функції і біля точки a функція прямує до нескінченності.

Пряма $y = a$ буде горизонтальною асимптотою графіка функції $f(x)$, якщо $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ або $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$.

Приклад 6. Дослідіть функцію $f(x) = \frac{2x^3 + 4}{x^3 + 8}$ на вертикальні і горизонтальні асимптоти.

Розв'язання. Областю визначення є множина $D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$ на усій області визначення функція неперервна, тому вертикальна асимптота може бути лише в точці $x = -2$.

$$\lim_{x \rightarrow -2-} \frac{2x^3 + 4}{x^3 + 8} = \left[\frac{-12}{+0} \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{2x^3 + 4}{x^3 + 8} = \left[\frac{-12}{-0} \right] = +\infty$$

Запис $\left[\frac{-12}{+0} \right]$ означає, що ми ділимо число -12 на близьке до нуля додатне число,

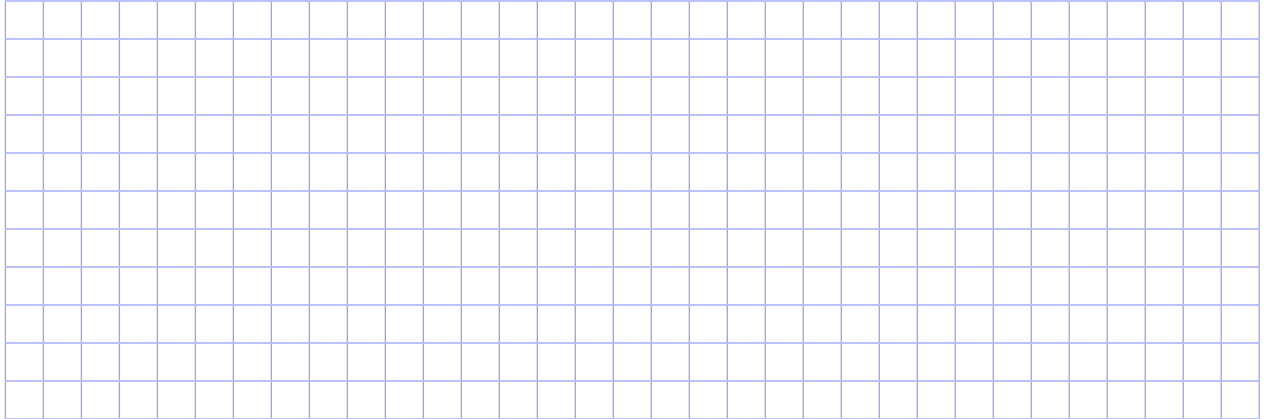
а запис $\left[\frac{-12}{-0} \right]$ – що на близьке до нуля від'ємне число.

Отже, $x = -2$ – рівняння вертикальної асимптоти.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 4}{x^3 + 8} = \frac{2}{1} = 2, \text{ тому } y = 2 \text{ – рівняння горизонтальної асимптоти.}$$

Відповідь. $x = -2$, $y = 2$.

Приклад 7. Функція виду $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, де a, b, c, d – деякі попарно різні числа, причому $c \neq 0$, називається дробово-лінійною. Дослідіть цю функцію на вертикальні і горизонтальні асимптоти.



Приклад 8. Дослідіть функцію $f(x) = \begin{cases} \frac{6x-3}{x+4}, & x \geq 0, \\ \frac{7}{2x-1}, & x < 0 \end{cases}$ на вертикальні і горизонтальні асимптоти.

Розв'язання. Функція $f(x)$ — неперервна в усіх точках крім $x = 0$.

Дослідимо функцію на вертикальні асимптоти в точці $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{7}{2x-1} = -7, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6x-3}{x+4} = -\frac{3}{4}.$$

Точка $x = 0$ – точка розриву першого роду, тому дана функція не має вертикальних асимптот.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x-3}{x+4} = 6, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7}{2x-1} = 0.$$

Отже, прямі $y = 6$ та $y = 0$ є горизонтальними асимптотами.

Відповідь. $y = 6, y = 0$.

V. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Під час аварійного викиду шкідливої речовини концентрація $C(x)$ (у мг/м³) у повітрі залежить від відстані x (у метрах) від місця викиду та описується функцією $C(x) = \frac{20x+100}{x-5}$, $x > 5$. Знайдіть границю функції $C(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, визначте горизонтальну асимптоту графіка функції та поясніть до якого рівня наближається концентрація шкідливої речовини зі збільшенням відстані від місця викиду. Знайдіть вертикальну асимптоту функції та поясніть, що вона означає.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x + 4}{2x^3 - 4x^2 + 3}$.
2. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 5}{2x^2 + 3x^2 + 3}$.
3. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + 4x^4 - 2}{7x^3 - 2x + 5}$.
4. Дослідіть функцію $f(x)$ на вертикальні і горизонтальні асимптоти:
1) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-16}$; 2) $f(x) = \frac{x^3-1}{x-2}$.
5. Знайдіть вертикальні асимптоти графіка функції:
1) $y = \frac{1}{x-3}$; 2) $y = \frac{2}{x+2}$.
6. Дослідіть функцію на вертикальні і горизонтальні асимптоти:
1) $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$; 2) $y = \frac{6x+x^2-5}{x}$.

Рівень В

1. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^5 - x^2 + 7}{7x^4 - 8x^5 + 9}$.
2. Обчисліть границю:
1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^4 + 13} - 2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2 - 9}}$; 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 13} + \sqrt{x}}{\sqrt{x^6 - 9x^2 + 3}}$.
3. Обчисліть границю:
1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 5x})$; 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - x} - x)$;
3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x)$; 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$.
4. Обчисліть границю:
1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{x^2 + x})$; 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 3} - \sqrt{x^2 - x})$.
5. Дослідіть функцію на вертикальні і горизонтальні асимптоти:
1) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$; 2) $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 9}}$.
6. Дослідіть функцію $f(x)$ на вертикальні і горизонтальні асимптоти:
1) $f(x) = \frac{x+1}{x^2 - x}$; 2) $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$.
7. Знайдіть горизонтальні і вертикальні асимптоти графіка функції:
1) $y = \frac{2x+1}{x-1}$; 2) $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$.
8. Складіть приклади функцій (у кожному випадку запишіть аналітичний вираз):
1) із заданими вертикальними асимптотами $x = a$, $x = b$, $x = c$;
2) із заданими горизонтальними асимптотами $y = d$, $y = p$.

- 9.** Запишіть за допомогою позначення границі, що:
- 1) пряма $y = 1$ є горизонтальною асимптотою графіка функції $y = g(x)$ у лівій півплощині;
 - 2) пряма $y = 1$ є горизонтальною асимптотою графіка функції $y = g(x)$ у лівій і в правій півплощинах;
 - 3) пряма $x = 3$ є вертикальною асимптотою графіка функції $y = g(x)$.
- 10.** Зобразіть графік деякої функції, для якої виконується умова:
- 1) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \infty$;
 - 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$;
 - 3) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$;
 - 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$.
- 11.** Дослідіть функцію на вертикальні і горизонтальні асимптоти:
- 1) $y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1}$;
 - 2) $y = \frac{x\sqrt{x}}{x^2+1}$.
- 12.** Обчисліть границю:
- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 5x + 1}{2x - 3x^3}$;
 - 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + x^6}{x^4 + x^3}$.

Рівень С

- 1.** Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{25x^6 + x - 2} + \sqrt{x^3 + 1}}{\sqrt[3]{27x^9 + 5x^4 - 4x}}$.
- 2.** Обчисліть границю:
- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x})$;
 - 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{(2x+3)^2} - \sqrt[3]{(2x-7)^2} \right)$.
- 3.** Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$.
- 4.** Дослідіть функцію на вертикальні і горизонтальні асимптоти:
- 1) $y = x \operatorname{arctg} x$;
 - 2) $y = x \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right)$.
- 5.** Дослідіть функцію на вертикальні і горизонтальні асимптоти:
- 1) $y = \arcsin \frac{1}{x}$;
 - 2) $y = \arccos \frac{1}{x}$.
- 6.** Обчисліть границю:
- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 \sin 8x - 6 \cos 7x}{x^2 + 1}$;
 - 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 8 \cos x}{x}$.
- 7. Творче завдання.** Дослідіть способи задання асимптот у різноманітних комп'ютерних програмах (Geogebra, Desmos тощо).

Рефлексія

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що

- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
-
-
- 4) Найскладнішим для мене було
-
-
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
-
-
- 6) Найбільше мені сподобалося
-
-

Можливі теми проєктів

1. Границі багаточленів та дробово-раціональних функцій при необмеженому зростанні аргументу.
2. Застосування границь при $x \rightarrow \pm\infty$ для дослідження поведінки функцій та схематичної побудови їх графіків.
3. Практичне значення асимптот у аналізі поведінки функцій.
4. Графічне дослідження функцій із вертикальними та горизонтальними асимптотами.
5. Зв'язок між точками розриву та наявністю вертикальних асимптот.

