

11

Тема 1.

Границя та неперервність функції

Урок 21. Урок–практикум. Обчислення границь функцій при $x \rightarrow \infty$. Знаходження асимптот графіків функцій

Тип уроку: урок формування вмінь і навичок.

План уроку

1. Обчислення границь функцій при $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$.
2. Знаходження горизонтальних та вертикальних асимптот графіків функцій.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

оцінює результати за наданими чи самостійно розробленими критеріями [12 МАО 2.4.1–1 П];

обирає математичну модель розв'язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов [12 МАО 3.2.2–1 П];

реалізовує визначену послідовність дій для розв'язання специфічних проблемних ситуацій, перевіряє та досліджує отримані результати [12 МАО 4.2.1–2 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.
- 6) Обов'язково пропонуйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Робота над обраним проєктом може тривати впродовж вивчення (повторення) усієї змістової теми. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С.

10) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Як границі при $x \rightarrow \infty$ допомагають спростити складні моделі реальних процесів?

2) Чи завжди наявність розриву означає існування вертикальної асимптоти?

3) Чи може одна й та сама функція мати кілька асимптот різного типу і, що це означає?

4) Чому для деяких процесів важливе не значення функції, а те, до чого вона прямує з часом?

5) Як асимптоти допомагають швидко уявити загальний вигляд графіка функції без детального обчислення значень?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Знайдіть границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-4}{2x+7}$.

Відповідь. $\frac{3}{2}$.

2. Установіть характер точки розриву функції $f(x) = \frac{4-x^2}{2-x}$.

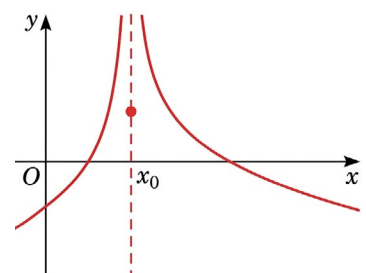
Відповідь. Усунний розрив.

3. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-4x}{3x+5x^2}$.

Відповідь. $-\frac{4}{3}$.

4. Чому дорівнює границя функції, графік якої зображений на рисунку, в точці x_0 ?

Відповідь. $+\infty$.



5. Знайдіть границю послідовності $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)(1-2n^2)}{n^3+8}$.

Відповідь. -6.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Під час аварійного викиду шкідливої речовини концентрація $C(x)$ (у мг/м³) у повітрі залежить від відстані x (у метрах) від місця викиду та описується функцією $C(x) = \frac{20x+100}{x-5}$, $x > 5$. Знайдіть границю функції $C(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, визначте горизонтальну асимптоту графіка функції та поясніть до якого рівня наближається концентрація шкідливої речовини зі збільшенням відстані від місця викиду. Знайдіть вертикальну асимптоту функції та поясніть, що вона означає.

III. Обчислення границь функцій при $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ (5–7 хв)

При обчисленні границь функцій при $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ часто виникають так звані невизначеності виду $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ та $[\infty - \infty]$.

1) Розберемо випадок коли функція задана у вигляді раціонального дробу (чисельник і знаменник дробу є многочленами).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}, \quad a_0 \neq 0, \quad b_0 \neq 0.$$

Винесемо за дужки в чисельнику x^n , а в знаменнику x^m . Отримуємо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{n-m} \cdot \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_m}{x^m}}.$$

Границя другого множника дорівнює $\frac{a_0}{b_0}$ і відрізняється від нуля. Якщо $n > m$, то $x^{n-m} \rightarrow \infty$, тобто шукана границя дорівнює нескінченності. Якщо $n = m$, то $x^{n-m} = x^0 = 1$, шукана границя дорівнює $\frac{a_0}{b_0}$. Якщо $n < m$, то $x^{n-m} = \frac{1}{x^{m-n}} \rightarrow 0$. Тоді шукана границя дорівнює нулю.

Іншими словами якщо степінь многочлена у чисельнику більший за степінь многочлена у знаменнику, то границя на нескінченності такого дробу дорівнює нескінченності; якщо степінь многочлена у чисельнику менший за степінь многочлена у знаменнику, то границя на нескінченності такої функції дорівнює 0; якщо ж степені многочленів у чисельнику і знаменнику рівні, то границя такої функції дорівнює частці старших коефіцієнтів чисельника і знаменника.

2) У більш складному випадку коли виникає невизначеність виду $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$, але чисель-

ник або знаменник містить радикали, то теж можна скористатися методом подібним до того що описаний в 1 пункті: поділити чисельник і знаменник дробу на змінну в найбільшому із степенів, що містяться в чисельнику і знаменнику дробу.

Наприклад,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 - x^2 + 3} + \sqrt[3]{x + 5}}{8x^2 - 3x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{x^4 - x^2 + 3}}{x^2} + \frac{\sqrt[3]{x + 5}}{x^2}}{\frac{8x^2 - 3x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{x^4 - x^2 + 3}{x^4}} + \sqrt[3]{\frac{x + 5}{x^6}}}{\frac{8x^2 - 3x}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4}} + \sqrt[3]{\frac{1}{x^5} + \frac{5}{x^6}}}{8 - \frac{3}{x}} = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

3) При обчисленні границь функцій, якщо виникає невизначеність $[\infty - \infty]$, то при відніманні виразів з радикалами є сенс спробувати спочатку позбутися від ірраціональності в чисельнику чи знаменнику дробу.

Наприклад,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - x}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - x})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - x})}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2 + x}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x + 1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - x}}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Ілюстративні приклади (10–12 хв)

- 6.** Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 - x^2 + 3}{3x^4 + 8x^2 - x}$

Розв'язання. Функція задана у вигляді раціонального дробу, причому степінь многочлена у чисельнику дорівнює степеню многочлена у знаменнику, тому

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 - x^2 + 3}{3x^4 + 8x^2 - x} = \frac{7}{3}.$$

Відповідь. $\frac{7}{3}$.

- 7.** Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 - x^2 + 3x}{9x^4 - 7x^2 - 5}$.

Розв'язання. Функція задана у вигляді раціонального дробу, причому степінь многочлена у чисельнику менший степеня многочлена у знаменнику, тому

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 - x^2 + 3x}{9x^4 - 7x^2 - 5} = 0.$$

Відповідь. 0.

8. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^6 + x^5 - 3}{x^4 + 7x^2 - x}$.

Розв'язання. Функція задана у вигляді раціонального дробу, причому степінь многочлена у чисельнику більший степеня многочлена у знаменнику, тому

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^6 + x^5 - 3}{x^4 + 7x^2 - x} = \infty.$$

Відповідь. ∞ .

9. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{32x^5 + 2x - 7} + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt[3]{27x^3 + 6x^2 - 7}}$.

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{32x^5 + 2x - 7} + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt[3]{27x^3 + 6x^2 - 7}} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt[5]{32x^5 + 2x - 7} + \sqrt{x^2 - 1}}{x}}{\frac{\sqrt[3]{27x^3 + 6x^2 - 7}}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{\frac{32x^5 + 2x - 7}{x^5}} + \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}}}{\sqrt[3]{\frac{27x^3 + 6x^2 - 7}{x^3}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{32 + \frac{2}{x^4} - \frac{7}{x^5}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{\sqrt[3]{27 + \frac{6}{x} - \frac{7}{x^3}}} = \frac{\sqrt[5]{32} + \sqrt{1}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2 + 1}{3} = 1. \end{aligned}$$

Відповідь. 1.

10. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{5x^4 + x^2 - 5} + 3x - 7}{\sqrt[4]{4x^5 + 2x - 3} - 2x}$.

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{5x^4 + x^2 - 5} + 3x - 7}{\sqrt[4]{4x^5 + 2x - 3} - 2x} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{5x^4 + x^2 - 5} + 3x - 7}{x^{\frac{4}{3}}}}{\frac{\sqrt[4]{4x^5 + 2x - 3} - 2x}{x^{\frac{4}{3}}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{5x^4 + x^2 - 5}{x^4}} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{7}{\sqrt[3]{x^4}}}{\sqrt[12]{\frac{(4x^5 + 2x - 3)^3}{x^{16}}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{5 + \frac{1}{x^2} - \frac{5}{x^4}} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{7}{\sqrt[3]{x^4}}}{\sqrt[12]{\frac{\left(4 + \frac{2}{x^4} - \frac{3}{x^5}\right)^3}{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[12]{\frac{4}{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[12]{x}}{\sqrt[12]{4}} = \infty. \end{aligned}$$

Відповідь. ∞ .

11. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x^3 + 1} - \sqrt{x^3 - 1})$.

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання. } \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x^3 + 1} - \sqrt{x^3 - 1}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{3}{2}} \frac{(\sqrt{x^3 + 1})^2 - (\sqrt{x^3 - 1})^2}{\sqrt{x^3 + 1} + \sqrt{x^3 - 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3 + 1} + \sqrt{x^3 - 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^3}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^3}}} = \frac{2}{1 + 1} = 1. \end{aligned}$$

Відповідь. 1.

IV. Знаходження горизонтальних та вертикальних асимптот графіків функцій

Пряма $x = a$ буде вертикальною асимптотою графіка функції $y = f(x)$, якщо виконуються хоча б одна із умов: $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = -\infty$.

Вертикальна асимптота $x = a$ може бути в точці a , якщо точка a обмежує відкриті (або напіввідкриті) проміжки області визначення даної функції і біля точки a функція прямує до нескінченності.

Пряма $y = a$ буде горизонтальною асимптотою графіка функції $f(x)$, якщо $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ або $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$.

Ілюстративні приклади (5 хв)

12. Дослідіть функцію $f(x) = \frac{2x^3 + 4}{x^3 + 8}$ на вертикальні і горизонтальні асимптоти.

Розв'язання. Областю визначення є множина $D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$ на усій області визначення функція неперервна, тому вертикальна асимптота може бути лише в точці $x = -2$.

$$\lim_{x \rightarrow -2-} \frac{2x^3 + 4}{x^3 + 8} = \left[\frac{-12}{+0} \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{2x^3 + 4}{x^3 + 8} = \left[\frac{-12}{-0} \right] = +\infty$$

Запис $\left[\frac{-12}{+0} \right]$ означає, що ми ділимо число -12 на близьке до нуля додатне число,

а запис $\left[\frac{-12}{-0} \right]$ – що на близьке до нуля від'ємне число.

Отже, $x = -2$ – рівняння вертикальної асимптоти.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 4}{x^3 + 8} = \frac{2}{1} = 2, \text{ тому } y = 2 \text{ – рівняння горизонтальної асимптоти.}$$

Відповідь. $x = -2$, $y = 2$.

13. Функція виду $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$, де a, b, c, d – деякі попарно різні числа, причому $c \neq 0$, називається дробово-лінійною. Дослідіть цю функцію на вертикальні і горизонтальні асимптоти.

Розв'язання. Областю визначення є множина $D(f) = \left(-\infty; -\frac{d}{c}\right) \cup \left(-\frac{d}{c}; +\infty\right)$ на усій області визначення функція неперервна, тому вертикальна асимптота може бути лише в точці $x = -\frac{d}{c}$.

$\lim_{x \rightarrow -\frac{d}{c}} \frac{ax+b}{cx+d} = \infty$, тому $x = -\frac{d}{c}$ — рівняння горизонтальної асимптоти.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}$, тому $y = \frac{a}{c}$ — рівняння горизонтальної асимптоти.

Відповідь. $x = -\frac{d}{c}$, $y = \frac{a}{c}$.

- 14.** Дослідіть функцію $f(x) = \begin{cases} \frac{6x-3}{x+4}, & x \geq 0, \\ \frac{7}{2x-1}, & x < 0 \end{cases}$ на вертикальні і горизонтальні асимптоти.

Розв'язання. Функція $f(x)$ — неперервна в усіх точках крім $x = 0$.

Дослідимо функцію на вертикальні асимптоти в точці $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{7}{2x-1} = -7, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6x-3}{x+4} = -\frac{3}{4}.$$

Точка $x = 0$ — точка розриву першого роду, тому дана функція не має вертикальних асимптот.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x-3}{x+4} = 6, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7}{2x-1} = 0.$$

Отже, прямі $y = 6$ та $y = 0$ є горизонтальними асимптотами.

Відповідь. $y = 6$, $y = 0$.

V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Під час аварійного викиду шкідливої речовини концентрація $C(x)$ (у мг/м^3) у повітрі залежить від відстані x (у метрах) від місця викиду та описується функцією $C(x) = \frac{20x+100}{x-5}$, $x > 5$. Знайдіть границю функції $C(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, визначте горизонтальну асимптоту графіка функції та поясніть до якого рівня наближається концентрація шкідливої речовини зі збільшенням відстані від місця викиду. Знайдіть вертикальну асимптоту функції та поясніть, що вона означає.

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{20x+100}{x-5} = 20.$

Отже, $y = 20$ — рівняння горизонтальної асимптоти.

Це означає, що зі збільшенням відстані від місця викиду концентрація шкідливої речовини не зменшується до нуля, а наближається до сталого рівня — 20 мг/м^3 .

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} C(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{20x+100}{x-5} = \left[\frac{200}{+0} \right] = +\infty.$$

Вертикальна асимптота $x = 5$ означає, що на відстані дуже близькій до 5 м від місця викиду модель перестане працювати: концентрація за формулою різко зростає і прямує до нескінченності.

Відповідь. $y = 20$, $x = 5$.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (5–10 хв)

Рівень А

1. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x + 4}{2x^3 - 4x^2 + 3}$.
2. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 5}{2x^2 + 3x^2 + 3}$.
3. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + 4x^4 - 2}{7x^3 - 2x + 5}$.
4. Дослідіть функцію $f(x)$ на вертикальні і горизонтальні асимптоти:
 - 1) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-16}$;
 - 2) $f(x) = \frac{x^3-1}{x-2}$.
5. Знайдіть вертикальні асимптоти графіка функції:
 - 1) $y = \frac{1}{x-3}$;
 - 2) $y = \frac{2}{x+2}$.
6. Дослідіть функцію на вертикальні і горизонтальні асимптоти:
 - 1) $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$;
 - 2) $y = \frac{6x+x^2-5}{x}$.

Рівень В

1. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^5 - x^2 + 7}{7x^4 - 8x^5 + 9}$.
2. Обчисліть границю:
 - 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^4+13} - 2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-9}}$;
 - 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2+13} + \sqrt{x}}{\sqrt{x^6-9x^2+3}}$.
3. Обчисліть границю:
 - 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2+5x})$;
 - 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-x} - x)$;
 - 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+5x} - x)$;
 - 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x} - x)$.
4. Обчисліть границю:
 - 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+x})$;
 - 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-3} - \sqrt{x^2-x})$.
5. Дослідіть функцію на вертикальні і горизонтальні асимптоти:
 - 1) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;
 - 2) $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+9}}$.
6. Дослідіть функцію $f(x)$ на вертикальні і горизонтальні асимптоти:
 - 1) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-x}$;
 - 2) $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$.

7. Знайдіть горизонтальні і вертикальні асимптоти графіка функції:
1) $y = \frac{2x+1}{x-1}$; 2) $y = \frac{x^2-4}{x^2+1}$.
8. Складіть приклади функцій (у кожному випадку запишіть аналітичний вираз):
1) із заданими вертикальними асимптотами $x = a$, $x = b$, $x = c$;
2) із заданими горизонтальними асимптотами $y = d$, $y = p$.
9. Запишіть за допомогою позначення границі, що:
1) пряма $y = 1$ є горизонтальною асимптотою графіка функції $y = g(x)$ у лівій півплощині;
2) пряма $y = 1$ є горизонтальною асимптотою графіка функції $y = g(x)$ у лівій і в правій півплощинах;
3) пряма $x = 3$ є вертикальною асимптотою графіка функції $y = g(x)$.
10. Зобразіть графік деякої функції, для якої виконується умова:
1) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \infty$; 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$;
3) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$; 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$.
11. Дослідіть функцію на вертикальні і горизонтальні асимптоти:
1) $y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1}$; 2) $y = \frac{x\sqrt{x}}{x^2+1}$.
12. Обчисліть границю:
1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 5x + 1}{2x - 3x^3}$; 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + x^6}{x^4 + x^3}$.

VII. Рефлексія (1–2 хв)

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
.....
.....
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
.....
.....
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
.....
.....
- 4) Найскладнішим для мене було
.....
.....
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
.....
.....
- 6) Найбільше мені сподобалося
.....
.....

Можливі теми проєктів

1. Границі багаточленів та дробово-раціональних функцій при необмеженому зростанні аргументу.
2. Застосування границь при $x \rightarrow \pm\infty$ для дослідження поведінки функцій та схематичної побудови їх графіків.
3. Практичне значення асимптот у аналізі поведінки функцій.
4. Графічне дослідження функцій із вертикальними та горизонтальними асимптотами.
5. Зв'язок між точками розриву та наявністю вертикальних асимптот.