

**Урок 22. Урок–практикум. Знаходження асимптот
графіків функцій****РОБОЧИЙ АРКУШ**

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) відпрацюєте алгоритм дослідження функцій на вертикальні та горизонтальні асимптоти;
- 2) удосконалисте навички знаходження похилих асимптот;
- 3) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Знайдіть границю послідовності $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2n+1} + 5 \right)$.
2. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 10x}{x^2}$.
3. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{25 - x^2}{5 + x}$.
4. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2\sqrt{-x}}{3 + x}$.
5. Дослідіть функцію $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2}, & x \neq -2, \\ 2, & x = -2 \end{cases}$ на неперервність та установіть характер точок розриву.

III. Знаходження горизонтальних та вертикальних асимптот графіків функцій

Нагадаємо, що пряма $x = a$ буде вертикальною асимптотою графіка функції $y = f(x)$ якщо виконується хоча б одна із умов:

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = -\infty.$$

Вертикальна асимптота $x = a$ може бути в точці a , якщо точка a обмежує відкриті (або напіввідкриті) проміжки області визначення даної функції і біля точки a функція прямує до нескінченності.

Примітка. Вертикальна асимптота можлива лише в точках розриву другого роду.

Пряма $y = a$ буде горизонтальною асимптотою графіка функції $f(x)$, якщо $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ або $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$.

Приклад 1. Дослідіть функцію $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{-x-1}}$ на вертикальні і горизонтальні асимптоти.

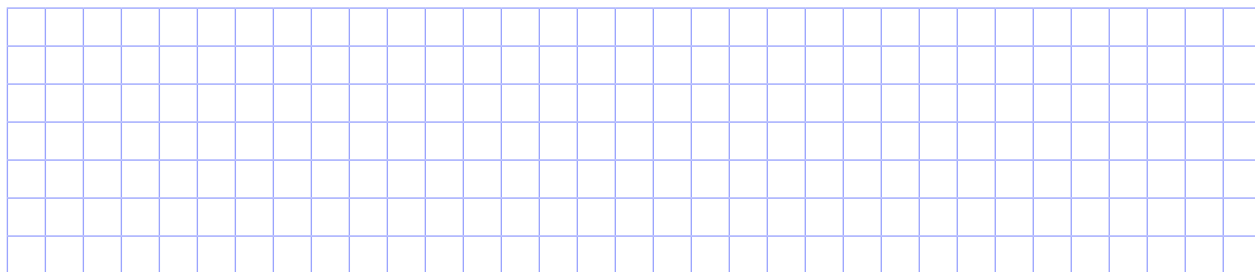
Розв'язання. Область визначення функції: $D(f) = (-\infty; -1)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{\sqrt{-x-1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{-\sqrt{-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}} = -\infty, \text{ це означає, що функція не має горизонтальної асимптоти.}$$

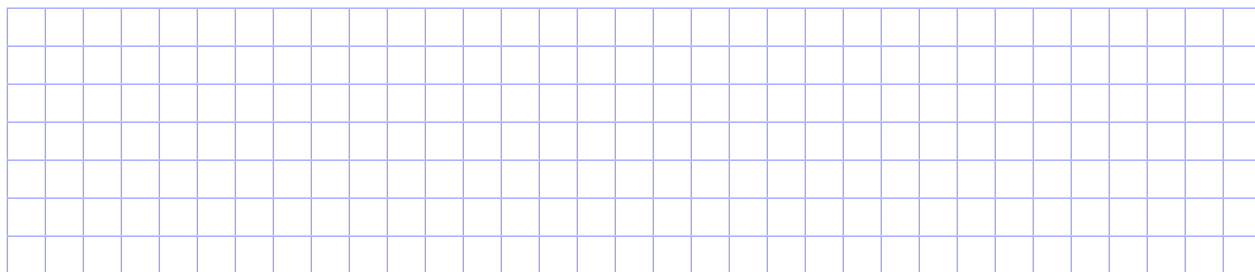
$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{x-2}{\sqrt{-x-1}} = -\infty, \text{ тобто } x = -1 \text{ — рівняння вертикальної асимптоти.}$$

Відповідь. $x = -1$.

Приклад 2. Дослідіть функцію $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ на вертикальні і горизонтальні асимптоти.



Приклад 3. Дослідіть функцію $y = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$ на вертикальні і горизонтальні асимптоти.



Приклад 4. Дослідіть функцію $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$ на вертикальні і горизонтальні асимптоти.

Розв'язання. $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = \left[\frac{1}{+0} \right] = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = \left[\frac{1}{-0} \right] = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = \left[\frac{1}{+0} \right] = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = \left[\frac{1}{-0} \right] = -\infty.$$

$x = 1$ та $x = -1$ — вертикальні асимптоти.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = 0.$$

Отже, $y = 0$ — горизонтальна асимптота.

Відповідь. $x = 1$, $x = -1$, $y = 0$.

IV. Знаходження похилих асимптот графіків функцій (5 хв)

Нагадаємо теорему про знаходження похилих асимптот.

Теорема. Пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою графіка функції f при $x \rightarrow +\infty$ тоді і тільки тоді, коли виконуються рівності:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b.$$

Примітка. У дробово-раціональних функціях похила асимптота наявна лише тоді, коли степінь багаточлена чисельника на одиницю більший за степінь багаточлена знаменника.

Нагадаємо алгоритм дослідження функції на асимптоти.

1) Знаходимо число k , де $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Якщо цієї границі не існує, то графік функції f при $x \rightarrow +\infty$ не має похилих і горизонтальних асимптот.

2) Знаходимо число b , де $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx)$. Якщо цієї границі не існує, то графік функції f при $x \rightarrow +\infty$ не має похилої асимптоти.

3) $y = kx + b$ є похилою асимптотою. Якщо $k = 0$, то $y = b$ — горизонтальна асимптота.

4) Повторити пункти 1–3 при $x \rightarrow -\infty$.

5) Якщо x_0 точка розриву, то знаходимо $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ та $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$. Якщо ці границі дорівнюють $+\infty$ чи $-\infty$, то $x = x_0$ — вертикальна асимптота.

Зрозуміти краще що таке асимптоти, перевірити чи правильно ви їх знайшли можна скориставшись Geogebra-аплетом:

<https://www.geogebra.org/m/errhpssc>



Приклад 5. Знайдіть рівняння похилої асимптоти графіка функції $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

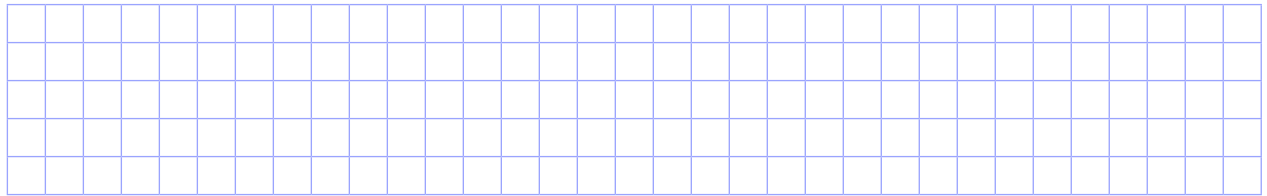
Розв'язання. $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1$, $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1$.

Отже, пряма $y = x + 1$ є похилою асимптотою графіка функції $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

Відповідь. $y = x + 1$.

Примітка. Запис $x \rightarrow \pm\infty$ означає, що границі функції на $+\infty$ і на $-\infty$ збігаються.

Приклад 6. Знайдіть рівняння похилої асимптоти графіка функції $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1}$.



Приклад 7. Знайдіть рівняння похилих асимптот графіка функції $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$.

Розв'язання. Якщо $x > 0$, то правильною є рівність $x = (\sqrt{x})^2$.

Тому $k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} = 1$,

$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 4 - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + x} =$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{4}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} + 1} = 1$.

Якщо $x < 0$, то правильною є рівність $x = -(\sqrt{-x})^2$.

Тому $k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} \right) = -1$,

$b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 4} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 4 - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x} =$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{4}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} - 1} = -1$.

Отже, пряма $y = x + 1$ є похилою асимптотою при $x \rightarrow +\infty$, а пряма $y = -x - 1$ є похилою асимптотою при $x \rightarrow -\infty$.

Відповідь. $y = x + 1$, $y = -x - 1$.

Приклад 8. Дослідіть функцію $f(x) = \frac{x^2}{|x| - 1}$ на асимптоти.

$$\text{Розв'язання. } k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x}{x-1} = 1,$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - k_1 x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x-1} \right) = 1;$$

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x}{-x-1} = -1, \quad b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - k_2 x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{-x-1} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x}{-x-1} \right) = 1.$$

Отже, $y = x + 1$ та $y = -x + 1$ — похилі асимптоти.

$$D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$$

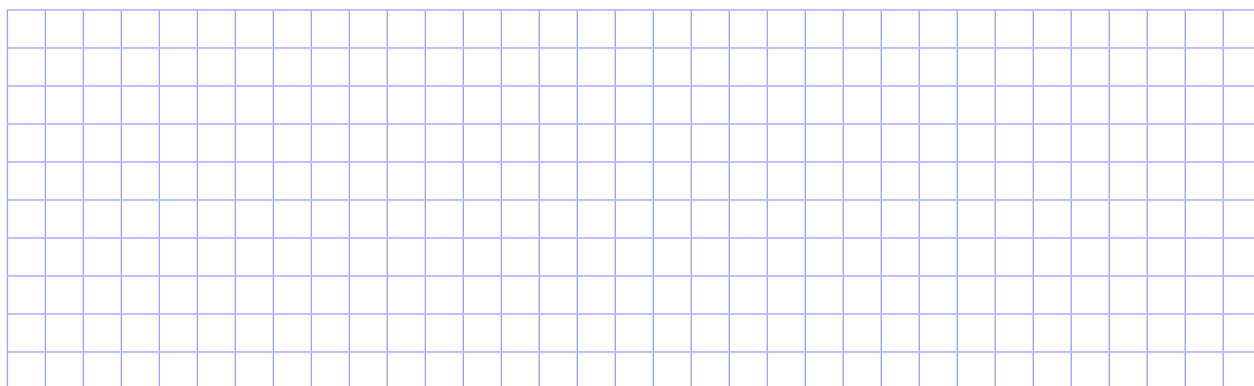
$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^2}{|x| - 1} = \left[\frac{1}{+0} \right] = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^2}{|x| - 1} = \left[\frac{1}{-0} \right] = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{x^2}{|x| - 1} = \left[\frac{1}{+0} \right] = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{x^2}{|x| - 1} = \left[\frac{1}{-0} \right] = -\infty.$$

$x = 1$ та $x = -1$ — вертикальні асимптоти.

Відповідь. $y = x + 1$, $y = -x + 1$, $x = 1$, $x = -1$.

Приклад 9. Дослідіть функцію $f(x) = \frac{x^2 - 8x + 20}{x - 4}$ на асимптоти.



V. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Під час нагрівання металевого стержня різниця температур T між його кінцями (у $^{\circ}\text{C}$) залежно від часу нагрівання t (у хвиликах) змінюється за законом

$$T(t) = \frac{t^2 + 6t + 8}{t}.$$

Знайдіть рівняння похилої асимптоти графіка функції $T(t)$ та поясніть фізичний зміст цієї асимптоти.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Дослідіть функцію $f(x)$ на вертикальні і горизонтальні асимптоти:

1) $f(x) = \frac{x-4}{x^3-8}$;

2) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3+2}$.

2. Знайдіть вертикальні асимптоти графіка функції:

1) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4}$;

2) $f(x) = \frac{5x^2-3x+1}{2x^2+7}$.

3. Дослідіть функцію на вертикальні і горизонтальні асимптоти:

1) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$;

2) $y = \frac{x}{6x+x^2-5}$.

4. Дослідіть функцію $f(x)$ на асимптоти:

1) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$;

2) $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2}$.

5. Дослідіть функцію $f(x)$ на асимптоти:

1) $f(x) = \frac{2x^2-3x+4}{x-1}$;

2) $f(x) = \frac{x^3+2x^2-1}{x^2-1}$.

6. Дослідіть функцію $f(x)$ на асимптоти:

1) $f(x) = \frac{3x^2+5}{2x}$;

2) $f(x) = \frac{4x^2-1}{x+2}$.

Рівень В

1. Дослідіть функцію $f(x)$ на асимптоти:

1) $f(x) = \frac{2x^3-3x^2+4x-1}{x^2-1}$;

2) $f(x) = \frac{3x^3+5x^2-2}{2x^2-3}$;

3) $f(x) = \frac{x^4-2x^3+1}{x^3+x}$;

4) $f(x) = \frac{x^4+1}{x^3-2x}$.

2. Дослідіть функцію $f(x)$ на асимптоти:

1) $f(x) = \frac{5x^3-4x+7}{x^2+2x-3}$;

2) $f(x) = \frac{2x^5-x^2+1}{x^4-1}$.

3. Дослідіть функцію $f(x)$ на асимптоти:

1) $f(x) = x - \sqrt{x^2+5x}$;

2) $f(x) = \sqrt{x^2-x} - x$;

3) $f(x) = \sqrt{x^2+5x} - x$;

4) $f(x) = \sqrt{x^2+x} - x$.

4. Дослідіть функцію $y = \frac{x^3}{x^2+4}$ на асимптоти.

5. Дослідіть функцію $y = \sqrt{4x+x^2}$ на похилі асимптоти.

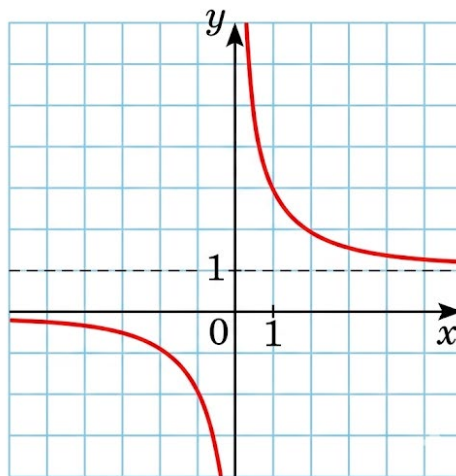
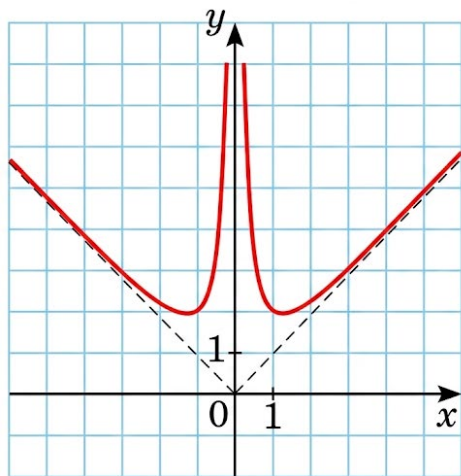
6. Дослідіть функцію $y = \sqrt{4x-x^2}$ на похилі асимптоти.

7. Знайдіть горизонтальні і вертикальні асимптоти графіка функції $f(x) = \frac{3x^2+2x-1}{x^2-1}$.

- 8.** Складіть приклади функцій (у кожному випадку запишіть аналітичний вираз):
- 1) із заданою похилою асимптотою $y = kx + b$;
 - 2) із заданими вертикальними асимптотами $y = d$, $y = p$ та горизонтальною асимптотою $y = a$.
- 9.** Знайдіть похилі і вертикальні асимптоти графіка функції:
- 1) $y = 2x + \frac{2}{x}$;
 - 2) $y = \frac{2x^2 + 3x}{x + 1}$;
- 10.** Зобразіть графік деякої функції, для якої виконується умова:
- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (2x - 3)) = 0$;
 - 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + (2 - x)) = 0$.
- 11.** Знайдіть вертикальні, горизонтальні та похилі асимптоти функції при $x \rightarrow +\infty$ та $x \rightarrow -\infty$:
- 1) $f(x) = \frac{11 - 4x}{3x + 5}$;
 - 2) $f(x) = \frac{1 - x^2}{4x - 5}$;
 - 3) $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + x + 1}$.
- 12.** Знайдіть асимптоти графіка функції $y = f(x)$, якщо:
- 1) $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x + 1}$;
 - 2) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2x}$.

Рівень С

- 1.** Задайте формулою функції, графіки яких зображені на рисунку.



- 2.** Залежно від значень параметра a дослідіть функцію $f(x) = \frac{x^2 + ax + 1}{x}$ на асимптоти.
- 3.** Знайдіть помилку в міркуваннях.

При $x > 0$ виконуються рівності $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} = x \cdot \sqrt{1 + \frac{x+1}{x^2}}$,

оскільки $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{x+1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1$, то при $x \rightarrow +\infty$ графік функції f майже не відрізняється від прямої $y = x$, тому пряма $y = x$ є похилою асимптотою графіка функції f при $x \rightarrow +\infty$.

- 4.** Дослідіть функцію $f(x)$ на асимптоти:

- 1) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 1} - x$;
- 2) $f(x) = \sqrt{4x^2 - x} - 2x$;
- 3) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x}$;
- 4) $f(x) = \frac{x\sqrt{x^2 + 1} - x^2}{x}$.

5. Дослідіть функцію на асимптоти:

1) $y = x \operatorname{arctg} x$;

2) $y = x \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right)$.

6. Залежно від значень параметра a дослідіть функцію $f(x) = \sqrt{x^2 + ax} + x - x$ на асимптоти. З'ясуйте, чи збігаються похилі асимптоти при $x \rightarrow +\infty$ і $x \rightarrow -\infty$.

7. *Творче завдання.* Створіть блок-схему універсального алгоритму знаходження всіх типів асимптот.

Рефлексія

- 1) Я сьогодні навчився/навчилась
-
-
- 2) Мені здалося цікавим
-
-
- 3) У мене залишилися запитання щодо
-
-

Можливі теми проєктів

- 1.** Порівняння різних способів знаходження похилої асимптоти (через ділення багаточленів і через границю).
- 2.** Автоматизація пошуку асимптот за допомогою комп'ютерних математичних систем (GeoGebra, WolframAlpha).
- 3.** Типові помилки при застосуванні алгоритмів знаходження асимптот та способи їхнього уникнення.
- 4.** Порівняння алгоритмів знаходження асимптот для раціональних, ірраціональних та комбінованих функцій.
- 5.** Узагальнення алгоритму пошуку асимптот для дробово-раціональних функцій вищих степенів.

