

11

Тема 1.

Границя та неперервність функції

Урок 22. Урок–практикум. Знаходження асимптот графіків функцій

Тип уроку: урок формування вмінь і навичок.

План уроку

1. Знаходження горизонтальних та вертикальних асимптот графіків функцій.
2. Знаходження похилих асимптот графіків функцій.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

визначає межі даних, формулює припущення щодо даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.3–1 П];

обирає серед кількох різних стратегій розв'язання специфічних проблемних ситуацій таку, що задовольняє певні умови [12 МАО 2.2.2–1 П];

визначає, яких даних недостатньо чи є надлишкові дані, під час розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.
- 6) Обов'язково пропонуйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чому при деяких значеннях аргументу функція «різко злітає» вгору або вниз? Чи можна передбачити такі точки?

2) Чому раціональні функції часто мають вертикальні асимптоти?

3) Чи може функція мати кілька вертикальних або горизонтальних асимптот?

4) Чому деякі функції при великих значеннях аргументу поведуться майже як лінійні?

5) Чи помічали ви, що у дробово-раціональних функцій похила асимптота з'являється тоді, коли степінь чисельника на одиницю більший за степінь знаменника?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Знайдіть границю послідовності $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2n+1} + 5 \right)$.

Відповідь. 5,5.

2. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 10x}{x^2}$.

Відповідь. 100.

3. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{25 - x^2}{5 + x}$.

Відповідь. 10.

4. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2\sqrt{-x}}{3+x}$.

Відповідь. 0.

5. Дослідіть функцію $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2}, & x \neq -2, \\ 2, & x = -2 \end{cases}$ на неперервність та установіть характер точок розриву.

Відповідь. Функція неперервна в усіх точках крім $x = -2$, яка є точкою усунютого розриву.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Під час нагрівання металевого стержня різниця температур T між його кінцями (у $^{\circ}\text{C}$) залежно від часу нагрівання t (у хвиликах) змінюється за законом $T(t) = \frac{t^2 + 6t + 8}{t}$. Знайдіть рівняння похилої асимптоти графіка функції $T(t)$ та поясніть фізичний зміст цієї асимптоти.

III. Знаходження горизонтальних та вертикальних асимптот графіків функцій

Нагадаємо, що пряма $x = a$ буде вертикальною асимптотою графіка функції $y = f(x)$ якщо виконується хоча б одна із умов:

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = -\infty.$$

Вертикальна асимптота $x = a$ може бути в точці a , якщо точка a обмежує відкриті (або напіввідкриті) проміжки області визначення даної функції і біля точки a функція прямує до нескінченності.

Примітка. Вертикальна асимптота можлива лише в точках розриву другого роду.

Пряма $y = a$ буде горизонтальною асимптотою графіка функції $f(x)$, якщо $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ або $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$.

Ілюстративні приклади (5 хв)

6. Дослідіть функцію $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{-x-1}}$ на вертикальні і горизонтальні асимптоти.

Розв'язання. Область визначення функції: $D(f) = (-\infty; -1)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{\sqrt{-x-1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{\sqrt{-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}} = -\infty, \text{ це означає, що функція не має горизонтальної асимптоти.}$$

горизонтальної асимптоти.

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{x-2}{\sqrt{-x-1}} = -\infty, \text{ тобто } x = -1 \text{ — рівняння вертикальної асимптоти.}$$

Відповідь. $x = -1$.

7. Дослідіть функцію $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ на вертикальні і горизонтальні асимптоти.

Розв'язання. $D(f) = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

$\lim_{x \rightarrow \pm 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm 1} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = +\infty$, тому прямі $x = 1$ та $x = -1$ є вертикальними асимптотами.

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = 0$. Отже, пряма $y = 0$ є горизонтальною асимптотою.

Відповідь. $x = 1, x = -1, y = 0$.

8. Дослідіть функцію $y = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$ на вертикальні і горизонтальні асимптоти.

Розв'язання. $D(f) = (-\infty; 0] \cup (1; +\infty)$

$\lim_{x \rightarrow 1+} \sqrt{\frac{x}{x-1}} = +\infty$, тому $x = 1$ — рівняння вертикальної асимптоти.

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \sqrt{\frac{x}{x-1}} = 1$, тому $y = 1$ — рівняння горизонтальної асимптоти.

Відповідь. $x = 1, y = 1$.

9. Дослідіть функцію $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$ на вертикальні і горизонтальні асимптоти.

Розв'язання. $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = \left[\frac{1}{+0} \right] = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = \left[\frac{1}{-0} \right] = -\infty$;

$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = \left[\frac{1}{+0} \right] = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = \left[\frac{1}{-0} \right] = -\infty$.

$x = 1$ та $x = -1$ — вертикальні асимптоти.

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = 0$.

Отже, $y = 0$ — горизонтальна асимптота.

Відповідь. $x = 1, x = -1, y = 0$.

IV. Знаходження похилих асимптот графіків функцій (5 хв)

Нагадаємо теорему про знаходження похилих асимптот.

Теорема. Пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою графіка функції f при $x \rightarrow +\infty$ тоді і тільки тоді, коли виконуються рівності:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b.$$

Примітка. У дробово-раціональних функціях похила асимптота наявна лише тоді, коли степінь багаточлена чисельника на одиницю більший за степінь багаточлена знаменника.

Нагадаємо алгоритм дослідження функції на асимптоти.

1) Знаходимо число k , де $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Якщо цієї границі не існує, то графік функції f при $x \rightarrow +\infty$ не має похилих і горизонтальних асимптот.

2) Знаходимо число b , де $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx)$. Якщо цієї границі не існує, то графік функції f при $x \rightarrow +\infty$ не має похилої асимптоти.

3) $y = kx + b$ є похилою асимптотою. Якщо $k = 0$, то $y = b$ – горизонтальна асимптота.

4) Повторити пункти 1–3 при $x \rightarrow -\infty$.

5) Якщо x_0 точка розриву, то знаходимо $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ та $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$. Якщо ці границі дорівнюють $+\infty$ чи $-\infty$, то $x = x_0$ – вертикальна асимптота.

Зрозуміти краще що таке асимптоти, перевірити чи правильно ви їх знайшли можна скориставшись Geogebra-аплетом:

<https://www.geogebra.org/m/errhpssc>



Ілюстративні приклади (10–12 хв)

10. Знайдіть рівняння похилої асимптоти графіка функції $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

$$\text{Розв'язання. } k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1.$$

Отже, пряма $y = x + 1$ є похилою асимптотою графіка функції $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

Відповідь. $y = x + 1$.

Примітка. Запис $x \rightarrow \pm\infty$ означає, що границі функції на $+\infty$ і на $-\infty$ збігаються.

11. Знайдіть рівняння похилої асимптоти графіка функції $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1}$.

$$\text{Розв'язання. } k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2 - 2x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^3 - 2x^2 + x} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 2x + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - x^3 + 2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} = 2.$$

Отже, пряма $y = x + 2$ є похилою асимптотою графіка функції $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1}$.

Відповідь. $y = x + 2$.

12. Знайдіть рівняння похилих асимптот графіка функції $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$.

Розв'язання. Якщо $x > 0$, то правильною є рівність $x = (\sqrt{x})^2$.

$$\text{Тому } k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} = 1,$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 4 - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{4}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} + 1} = 1.$$

Якщо $x < 0$, то правильною є рівність $x = -(\sqrt{-x})^2$.

$$\text{Тому } k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} \right) = -1,$$

$$b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 4} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 4 - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{4}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} - 1} = -1.$$

Отже, пряма $y = x + 1$ є похилою асимптотою при $x \rightarrow +\infty$, а пряма $y = -x - 1$ є похилою асимптотою при $x \rightarrow -\infty$.

Відповідь. $y = x + 1$, $y = -x - 1$.

13. Дослідіть функцію $f(x) = \frac{x^2}{|x| - 1}$ на асимптоти.

$$\text{Розв'язання. } k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x}{x - 1} = 1,$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - k_1 x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x - 1} \right) = 1;$$

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x}{-x - 1} = -1, \quad b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - k_2 x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{-x - 1} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x}{-x - 1} \right) = 1.$$

Отже, $y = x + 1$ та $y = -x + 1$ — похилі асимптоти.

$$D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{|x| - 1} = \left[\frac{1}{+0} \right] = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{|x| - 1} = \left[\frac{1}{-0} \right] = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2}{|x| - 1} = \left[\frac{1}{+0} \right] = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{|x| - 1} = \left[\frac{1}{-0} \right] = -\infty.$$

$x = 1$ та $x = -1$ — вертикальні асимптоти.

Відповідь. $y = x + 1$, $y = -x + 1$, $x = 1$, $x = -1$.

14. Дослідіть функцію $f(x) = \frac{x^2 - 8x + 20}{x - 4}$ на асимптоти.

$$\text{Розв'язання. } \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 - 8x + 20}{x - 4} = \left[\frac{4}{-0} \right] = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2 - 8x + 20}{x - 4} = \left[\frac{4}{+0} \right] = +\infty, \text{ тому } x = 4 \text{ — вертикальна асимптота.}$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 8x + 20}{x^2 - 4x} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 8x + 20}{x - 4} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-4x + 20}{x - 4} = -4.$$

Отже, $y = x - 4$ — похила асимптота.

Відповідь. $x = 4$, $y = x - 4$.

V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Під час нагрівання металевого стержня різниця температур T між його кінцями (у $^{\circ}\text{C}$) залежно від часу нагрівання t (у хвиликах) змінюється за законом $T(t) = \frac{t^2 + 6t + 8}{t}$. Знайдіть рівняння похилої асимптоти графіка функції $T(t)$ та поясніть фізичний зміст цієї асимптоти.

Розв'язання. Нехай $y = kt + b$ — шукане рівняння похилої асимптоти.

$$k = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{T(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{t^2 + 6t + 8}{t}}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2 + 6t + 8}{t^2} = 1.$$

$$b = \lim_{t \rightarrow +\infty} (T(t) - kt) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t^2 + 6t + 8}{t} - t \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t^2 + 6t + 8 - t^2}{t} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{6t + 8}{t} = 6.$$

Отже, $y = t + 6$ — рівняння похилої асимптоти графіка функції

$$T(t) = \frac{t^2 + 6t + 8}{t} = t + 6 + \frac{8}{t}.$$

На початку нагрівання додатковий доданок $\frac{8}{t}$ суттєво впливає на температуру (через нерівномірний розподіл тепла), але з часом цей вплив зменшується, і різниця температур поводить майже як лінійна функція $T \approx t + 6$.

Тобто при великих значеннях t стержень нагрівається майже рівномірно.

Відповідь. $y = t + 6$.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (5–10 хв)

Рівень А

1. Дослідіть функцію $f(x)$ на вертикальні і горизонтальні асимптоти:

1) $f(x) = \frac{x-4}{x^3-8};$

2) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3+2}.$

2. Знайдіть вертикальні асимптоти графіка функції:

1) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4};$

2) $f(x) = \frac{5x^2-3x+1}{2x^2+7}.$

3. Дослідіть функцію на вертикальні і горизонтальні асимптоти:

1) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1};$

2) $y = \frac{x}{6x+x^2-5}.$

4. Дослідіть функцію $f(x)$ на асимптоти:

1) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$;

2) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$.

5. Дослідіть функцію $f(x)$ на асимптоти:

1) $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 4}{x - 1}$;

2) $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 - 1}$.

6. Дослідіть функцію $f(x)$ на асимптоти:

1) $f(x) = \frac{3x^2 + 5}{2x}$;

2) $f(x) = \frac{4x^2 - 1}{x + 2}$.

Рівень В

1. Дослідіть функцію $f(x)$ на асимптоти:

1) $f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 4x - 1}{x^2 - 1}$;

2) $f(x) = \frac{3x^3 + 5x^2 - 2}{2x^2 - 3}$;

3) $f(x) = \frac{x^4 - 2x^3 + 1}{x^3 + x}$;

4) $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^3 - 2x}$.

2. Дослідіть функцію $f(x)$ на асимптоти:

1) $f(x) = \frac{5x^3 - 4x + 7}{x^2 + 2x - 3}$;

2) $f(x) = \frac{2x^5 - x^2 + 1}{x^4 - 1}$.

3. Дослідіть функцію $f(x)$ на асимптоти:

1) $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 5x}$;

2) $f(x) = \sqrt{x^2 - x} - x$;

3) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x} - x$;

4) $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$.

4. Дослідіть функцію $y = \frac{x^3}{x^2 + 4}$ на асимптоти.

5. Дослідіть функцію $y = \sqrt{4x + x^2}$ на похилі асимптоти.

6. Дослідіть функцію $y = \sqrt{4x - x^2}$ на похилі асимптоти.

7. Знайдіть горизонтальні і вертикальні асимптоти графіка функції $f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1}$.

8. Складіть приклади функцій (у кожному випадку запишіть аналітичний вираз):

1) із заданою похилою асимптотою $y = kx + b$;

2) із заданими вертикальними асимптотами $y = d$, $y = p$ та горизонтальною асимптотою $y = a$.

9. Знайдіть похилі і вертикальні асимптоти графіка функції:

1) $y = 2x + \frac{2}{x}$;

2) $y = \frac{2x^2 + 3x}{x + 1}$;

10. Зобразіть графік деякої функції, для якої виконується умова:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (2x - 3)) = 0$;

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + (2 - x)) = 0$.

11. Знайдіть вертикальні, горизонтальні та похилі асимптоти функції при $x \rightarrow +\infty$ та $x \rightarrow -\infty$:

1) $f(x) = \frac{11 - 4x}{3x + 5}$;

2) $f(x) = \frac{1 - x^2}{4x - 5}$;

3) $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + x + 1}$.

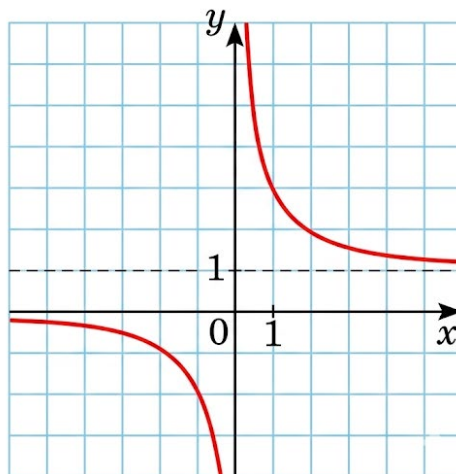
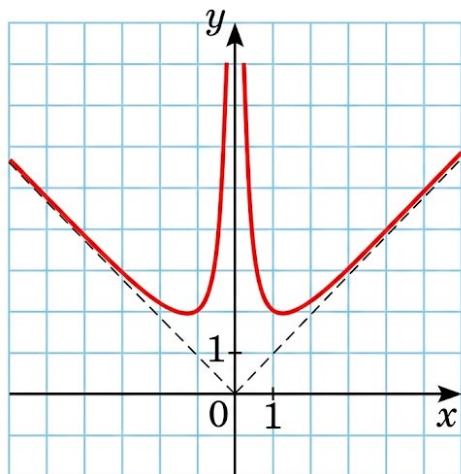
12. Знайдіть асимптоти графіка функції $y = f(x)$, якщо:

1) $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x + 1}$;

2) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2x}$.

Рівень С

1. Задайте формулою функції, графіки яких зображені на рисунку.



2. Залежно від значень параметра a дослідіть функцію $f(x) = \frac{x^2 + ax + 1}{x}$ на асимптоти.

3. Знайдіть помилку в міркуваннях.

При $x > 0$ виконуються рівності $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} = x \cdot \sqrt{1 + \frac{x+1}{x^2}}$,

оскільки $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{x+1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1$, то при $x \rightarrow +\infty$ графік функції f майже не відрізняється від прямої $y = x$, тому пряма $y = x$ є похилою асимптотою графіка функції f при $x \rightarrow +\infty$.

4. Дослідіть функцію $f(x)$ на асимптоти:

1) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 1} - x$;

2) $f(x) = \sqrt{4x^2 - x} - 2x$;

3) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x}$;

4) $f(x) = \frac{x\sqrt{x^2 + 1} - x^2}{x}$.

5. Дослідіть функцію на асимптоти:

1) $y = x \operatorname{arctg} x$;

2) $y = x \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right)$.

6. Залежно від значень параметра a дослідіть функцію $f(x) = \sqrt{x^2 + ax + x} - x$ на асимптоти. З'ясуйте, чи збігаються похилі асимптоти при $x \rightarrow +\infty$ і $x \rightarrow -\infty$.

7. Творче завдання. Створіть блок-схему універсального алгоритму знаходження всіх типів асимптот.

VII. Рефлексія (1 хв)

- 1) Я сьогодні навчився/навчилась
-
-
- 2) Мені здалося цікавим
-
-
- 3) У мене залишилися запитання щодо
-
-

Можливі теми проєктів

1. Порівняння різних способів знаходження похилої асимптоти (через ділення багаточленів і через границю).
2. Автоматизація пошуку асимптот за допомогою комп'ютерних математичних систем (GeoGebra, WolframAlpha).
3. Типові помилки при застосуванні алгоритмів знаходження асимптот та способи їхнього уникнення.
4. Порівняння алгоритмів знаходження асимптот для раціональних, ірраціональних та комбінованих функцій.
5. Узагальнення алгоритму пошуку асимптот для дробово-раціональних функцій вищих степенів.