

11

Тема 1.

Границя та неперервність функції

Урок 25. Підсумковий урок з теми: «Границя та неперервність функції»

Тип уроку: урок корекції знань.

План уроку

1. Аналіз контрольної роботи.
2. Корегування знань учнів/учениць. Розв'язування задач за результатами контрольної роботи.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

пропонує альтернативні шляхи досягнення результатів розв'язання специфічної проблемної ситуації, оцінює можливі ризики [12 МАО 1.3.2–1 П];

оцінює результати за наданими чи самостійно розробленими критеріями [12 МАО 2.4.1–1 П];

оцінює обґрунтованість математичного розв'язання в контексті реальної комплексної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.3–1 П];

робить висновки щодо застосування математичних понять і фактів [12 МАО 4.1.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Урок спрямований на аналіз підсумкової контрольної роботи, за результатами вивчення теми 1, та на корегування знань учнів/учениць з цієї теми.
- 2) Урок можна провести додатковим уроком захисту проєктів, якщо ви не використовували контрольну роботу як засіб перевірки знань учнів.
- 3) Для захисту проєктів забезпечте учнів/учениць технічними та навчальними засобами (ноутбуками, проекторами тощо).
- 4) Якщо ви проводите захист учнівських проєктів, то мотивуйте учнів/учениць до активного обговорення запропонованих проєктів.

- 5) За результатами захисту проєктів виставте учням/ученицям підсумкові (тематичні) оцінки.
- 6) До кожного завдання контрольної роботи наведено детальні розв'язки.
- 7) Після кожного завдання подані вправи для корегування, які можна призначити індивідуально учням/ученицям, у яких було виявлено прогалини в знаннях.

I. Організаційна частина (2–3 хв)

II. Захист індивідуальних (групових) проєктів.

III. Аналіз контрольної роботи. Корегування знань учнів (40 хв)

Завдання 1

Варіант 1. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1}{3x-1}$.

А	Б	В	Г	Д
1,5	$\frac{2}{3}$	-1,5	-1	0

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1}{3x-1} = \frac{2 \cdot 1 + 1}{3 \cdot 1 - 1} = \frac{3}{2} = 1,5$.

Відповідь. А.

Варіант 2. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}$	2	1	-1	0

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \frac{0^2-1}{2 \cdot 0^2-0-1} = \frac{-1}{-1} = 1$.

Відповідь. В.

Перше завдання роботи було спрямоване на перевірку уміння знаходити границю функції у точці, в якій ця функція неперервна.

Вправи для корегування

1. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 5x + 3)$;

2) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 3}$;

3) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 7x - 1}{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}$;

4) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 - 7x^2 + 5x - 2}{4x^2 + 6x - 8}$.

Завдання 2

Варіант 1. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$.

А	Б	В	Г	Д
4	∞	0	12	6

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 2^2 + 2 \cdot 2 + 4 = 12.$

Відповідь. Г.

Варіант 2. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3 + 64}{x + 4}$.

А	Б	В	Г	Д
16	48	0	∞	60

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3 + 64}{x + 4} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x + 4)(x^2 - 4x + 16)}{x + 4} = \lim_{x \rightarrow -4} (x^2 - 4x + 16) =$

$= (-4)^2 - 4 \cdot (-4) + 16 = 48.$

Відповідь. Б.

Друге завдання роботи має за мету перевірку уміння обчислювати границю в точці коли в якій виникає невизначеність виду $\left[\frac{0}{0} \right]$ за допомогою скорочення множника, який безпосередньо впливає на цю невизначеність.

Вправи для корегування

2. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3};$

2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}.$

Завдання 3

Варіант 1. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}$.

А	Б	В	Г	Д
0	$\frac{1}{4}$	∞	0,5	4

Розв'язання.

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(x - 2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{(x - 2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x+2} + 2} =$

$= \frac{1}{\sqrt{2+2} + 2} = \frac{1}{4}.$

Відповідь. Б.

Варіант 2. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{4+x}-2}$.

А	Б	В	Г	Д
0	$\frac{1}{4}$	∞	4	0,5

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{4+x}-2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{4+x}+2)}{(\sqrt{4+x}-2)(\sqrt{4+x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{4+x}+2)}{x} =$

$= \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{4+x}+2) = \sqrt{4}+2 = 4.$

Відповідь. Г.

Метою третього завдання була перевірка уміння обчислювати границю де виникає невизначеність $\left[\frac{0}{0} \right]$ і яку розкривають множенням на вираз, який спряжений до ірраціонального виразу в чисельнику або знаменнику, після чого скорочують множник який безпосередньо впливає на невизначеність.

Вправи для корегування

3. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{2x+10}-4};$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x};$

3) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49};$

4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}.$

Завдання 4

Варіант 1. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2-\sqrt{x}}{4-x}$.

А	Б	В	Г	Д
4	∞	0	0,5	$\frac{1}{4}$

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2-\sqrt{x}}{4-x} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2-\sqrt{x}}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{2+\sqrt{x}} = \frac{1}{2+\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$

Відповідь. Д.

Варіант 2. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$.

А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{2}$	2	0	0,5	∞

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x}+\sqrt{2}) = \sqrt{2}+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$

Відповідь. А.

Четверте завдання перевіряє уміння обчислювати границю функції в точці, де при невизначеності виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ потрібно застосувати формулу «різниця квадратів» до ірраціональних виразів і скоротити множник, який впливає на цю невизначеність.

Вправи для корегування

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x}-4}{16-x};$

2) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9};$

3) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5-x}{\sqrt{x}-\sqrt{5}};$

4) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{7}}{x-7}.$

Завдання 5

Варіант 1. На якому з відрізків рівняння $x^3 - x + 2 = 0$ має корені?

А	Б	В	Г	Д
$[-2; -1]$	$[-1; 0]$	$[0; 1]$	$[1; 2]$	$[2; 3]$

Розв'язання. Розглянемо неперервну функцію $f(x) = x^3 - x + 2$.

$$f(-2) = (-2)^3 - (-2) + 2 = -8 + 2 + 2 = -4.$$

$$f(-1) = (-1)^3 - (-1) + 2 = -1 + 1 + 2 = 2.$$

Отже, за першою теоремою Больцано-Коші на інтервалі $[-2; -1]$ рівняння $f(x) = 0$ має корінь.

Відповідь. А.

Варіант 2. На якому з відрізків рівняння $x^3 - x + 4 = 0$ має корені?

А	Б	В	Г	Д
$[-2; -1]$	$[-1; 0]$	$[0; 1]$	$[1; 2]$	$[2; 3]$

Розв'язання. Розглянемо неперервну функцію $f(x) = x^3 - x + 4$.

$$f(-2) = (-2)^3 - (-2) + 4 = -8 + 2 + 4 = -2.$$

$$f(-1) = (-1)^3 - (-1) + 4 = -1 + 1 + 4 = 4.$$

Отже, за першою теоремою Больцано-Коші на інтервалі $[-2; -1]$ рівняння $f(x) = 0$ має корінь.

Відповідь. А.

Завдання 5 мало за мету перевірити уміння застосовувати першу теорему Больцано-Коші для доведення наявності кореня на проміжку.

Вправи для корегування

5. 1) Доведіть, що рівняння $2 + 7x - x^3 = 0$ має корені;
 2) Доведіть, що рівняння $x^5 + 2x^2 - 11 = 0$ має принаймні один корінь.
 3) Доведіть, що рівняння $x^6 + 2x - 13 = 0$ має принаймні один корінь.
 4) Доведіть, що функція $f(x) = x^3 - 6x + 4$ має не менше одного нуля на відрізку $[0; 3]$.

Завдання 6

Варіант 1. Укажіть множину значень функції $f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 3x^2 + 1}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left[0; \frac{1}{3}\right]$	$\left[0; \frac{1}{2}\right]$	$\left[0; \frac{1}{4}\right]$	$\left[0; \frac{1}{5}\right]$	$\left[0; \frac{1}{6}\right]$

Розв'язання. $\frac{x^2}{x^4 + 3x^2 + 1} \geq 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Оскільки $f(0) = 0$, то $\min_{\mathbb{R}} f(x) = 0$.

Застосувавши нерівність Коші, запишемо

$$x^4 + 1 \geq 2\sqrt{x^4 \cdot 1} = 2x^2, \text{ отже } x^4 + 1 + 3x^2 \geq 5x^2.$$

Внаслідок того, що вирази $x^4 + 3x^2 + 1$ та x^2 при $x \neq 0$ додатні, то справедливою

є нерівність $\frac{1}{x^4 + 3x^2 + 1} \leq \frac{1}{5x^2}$, звідки $\frac{x^2}{x^4 + 3x^2 + 1} \leq \frac{1}{5}$.

Оскільки $f(1) = \frac{1}{5}$, то $\max_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{5}$.

Функція f неперервна на $\mathbb{R}$. З наслідку другої теореми Больцано-Коші випливає,

що $E(f) = \left[0; \frac{1}{5}\right]$.

Відповідь. Г.

Варіант 2. Укажіть множину значень функції $f(x) = \frac{x^2}{9x^4 + 1}$

А	Б	В	Г	Д
$[0; 1]$	$[0; 9]$	$\left[0; \frac{1}{3}\right]$	$\left[0; \frac{1}{9}\right]$	$\left[0; \frac{1}{6}\right]$

Розв'язання. $\frac{x^2}{9x^4 + 1} \geq 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Оскільки $f(0) = 0$, то $\min_{\mathbb{R}} f(x) = 0$.

Застосувавши нерівність Коші, запишемо

$$9x^4 + 1 \geq 2\sqrt{9x^4 \cdot 1} = 6x^2.$$

Внаслідок того, що вирази $9x^4 + 1$ та x^2 при $x \neq 0$ додатні, то справедливою є нерів-

ність $\frac{1}{9x^4 + 1} \leq \frac{1}{6x^2}$, звідки $\frac{x^2}{9x^4 + 1} \leq \frac{1}{6}$.

Оскільки $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{6}$, то $\max_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{6}$.

Функція f неперервна на $\mathbb{R}$. З наслідку другої теореми Больцано-Коші випливає, що $E(f) = \left[0; \frac{1}{6}\right]$.

Відповідь. Д.

Завдання 6 перевіряє засвоєння учнями уміння знаходити множину значень обмеженої функції використовуючи наслідок із другої теореми Больцано-Коші.

Вправи для корегування

6. Знайдіть область значень функції:

1) $y = \frac{x^2}{16x^4 + 1}$;

1) $y = \frac{x^2}{16x^4 + 5x^2 + 1}$.

Завдання 7

Варіант 1. Обчисліть лівосторонню границю функції $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x < 2, \\ \sqrt{x + 2}, & x \geq 2 \end{cases}$ в точці $x = 2$.

А	Б	В	Г	Д
2	4	0	$-\infty$	1

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2-} (x + 2) = 4$.

Відповідь. Б.

Варіант 2. Обчисліть правосторонню границю функції $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x < 2, \\ \sqrt{x + 2}, & x \geq 2 \end{cases}$ в точці $x = 2$.

А	Б	В	Г	Д
2	4	0	$+\infty$	1

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} \sqrt{x + 2} = 2$

Відповідь. А.

Завдання 7 мало за мету перевірити уміння знаходити односторонні границі функцій, що задані кусково-аналітично.

Вправи для корегування

7. 1) Знайдіть ліву і праву границю функції $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < -1, \\ x^2, & x \geq -1 \end{cases}$ в точці $x = -1$;

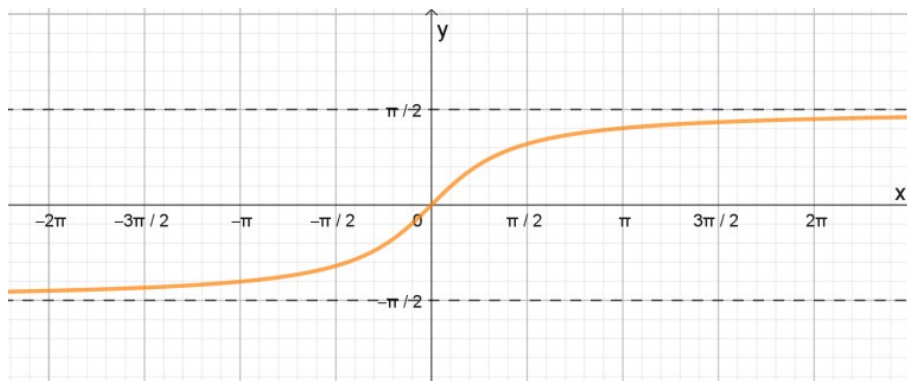
2) Знайдіть ліву і праву границю функції $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3}, & x < 3, \\ x - 3, & x \geq 3 \end{cases}$ в точці $x = 3$.

Завдання 8

Варіант 1. З-поміж наведених виберіть правильну рівність.

А	Б	В	Г	Д
$\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \arccos x = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \pi$	$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 1$

Розв'язання. Побудуємо графік функції $y = \operatorname{arctg} x$.



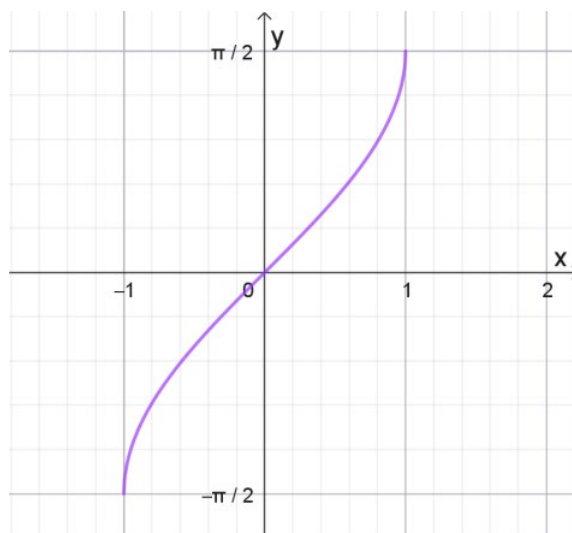
Користуючись графіком встановлюємо, що правильною є рівність $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$.

Відповідь. В.

Варіант 2. З-поміж наведених, виберіть неправильну рівність.

А	Б	В	Г	Д
$\lim_{x \rightarrow 1} \arcsin x = 0$	$\lim_{x \rightarrow 1} \arccos x = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

Розв'язання. Побудуємо графік функції $y = \arcsin x$.



Користуючись графіком встановлюємо, що неправильною рівністю є $\lim_{x \rightarrow 1} \arcsin x = 0$

Відповідь. А.

Завдання 8 було направлене на уміння швидко побудувавши графік елементарної функції установити правильність твердження щодо границі функції.

Вправи для корегування

8. 1) Знайдіть границю при $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ функцій $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arccotg} x$.
 2) Знайдіть границю в точках 0, -1 та 1 функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$.

Завдання 9

Варіант 1. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^2 + x^3 + 6}{2x^3 + 10x^2 + 5x}$.

А	Б	В	Г	Д
-1	0,5	1	3	-2

$$\text{Розв'язання. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^2 + x^3 + 6}{2x^3 + 10x^2 + 5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-4x^2 + x^3 + 6}{x^3}}{\frac{2x^3 + 10x^2 + 5x}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{4}{x} + 1 + \frac{6}{x^3}}{2 + \frac{10}{x} + \frac{5}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

Відповідь. Б.

Варіант 2. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - x^2 - 2x}{x^2 + 4x + 1}$.

А	Б	В	Г	Д
-1	1	2	3	-2

$$\text{Розв'язання. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - x^2 - 2x}{x^2 + 4x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3 - x^2 - 2x}{x^2}}{\frac{x^2 + 4x + 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x^2} - 1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{-1}{1} = -1.$$

Відповідь. А.

Завдання 9 перевіряє вміння знаходити границі дробово-раціональних функцій на нескінченності.

Вправи для корегування

9. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - x^2 + 1}{5x^2 - 2x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 2x^2 + 4}{3x^2 + 2x}$;

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$;

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 1}{3x^5 + 2x^3 - 1}$;

5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 2}{3x^4 - 7x + 1}$;

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2x + 10}{5x^2 + 3x - 1}$.

Завдання 10

Варіант 1. Для функції $f(x) = \begin{cases} -x^3, & x \leq 1, \\ 3+x, & x > 1 \end{cases}$ укажіть усі правильні твердження.

- I. Функція $f(x)$ визначена на множині усіх дійсних чисел.
- II. Границя функції $f(x)$ у точці $x = 1$ дорівнює -1 .
- III. Правостороння границя функції у точці $x = 1$ дорівнює 4 .

А	Б	В	Г	Д
лише I	лише I і II	лише I і III	I, II і III	лише III

Розв'язання. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x)^3 = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3+x) = 4.$$

Оскільки лівостороння і правостороння границі функції $f(x)$ не рівні, то функція $f(x)$ не має границі в точці $x = 1$.

Відповідь. В.

Варіант 2. Для функції $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 2, \\ \sqrt{x+2}, & x \geq 2 \end{cases}$ укажіть усі правильні твердження.

- I. Функція $f(x)$ визначена на множині усіх дійсних чисел.
- II. Лівостороння границя функції $f(x)$ у точці $x = 2$ дорівнює 5 .
- III. Для функції $f(x)$, $x = 2$ – точка розриву першого роду.

А	Б	В	Г	Д
лише II	лише II і III	лише III	I, II і III	лише I

Розв'язання. $D(f) = (-\infty; 2) \cup [2; +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 1) = 5, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x+2} = 2.$$

Оскільки лівостороння і правостороння границі функції $f(x)$ не рівні, то функція $f(x)$ в точці $x = 2$ має розрив першого роду.

Відповідь. Б.

Завдання 10 перевіряє уміння учнів/учениць знаходити односторонні границі функцій, що задані кусково-аналітичним способом та визначати характер точок розриву.

Вправи для корегування

10. 1) Дослідіть функцію $f(x) = \begin{cases} \arccos x, & -1 \leq x \leq 0, \\ x^3 - 3x^2 + x + 1, & 0 < x \leq 2, \\ x - 3, & x > 2 \end{cases}$ на неперервність та установіть характер точок розриву.

2) Дослідіть функцію $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ x, & 0 < x < 1, \\ 2+x, & x \geq 1 \end{cases}$ на неперервність та установіть характер точок розриву.

Завдання 11

Варіант 1. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{2x^2}$.

А	Б	В	Г	Д
1	2	4	0	∞

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2 \right) = 2$.

Відповідь. Б.

Варіант 2. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{3x^2}$.

А	Б	В	Г	Д
1	3	6	0	∞

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 \right) = 3$.

Відповідь. Б.

Завдання 11 перевіряє вміння застосовувати першу чудову границю до пошуку границь функцій, що містять тригонометричні і обернені тригонометричні функції у яких виникають невизначеності виду $\left[\frac{0}{0} \right]$.

Вправи для корегування

11. Обчисліть границю:

- | | |
|--|--|
| 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\arctg 3x}$; | 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\tg x}$; |
| 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\tg^2 4x}$; | 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x \arctg x}$. |

Завдання 12

Варіант 1. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4x}{\arctg 3x}$.

А	Б	В	Г	Д
1	0	$\frac{4}{3}$	∞	$-\frac{4}{3}$

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4x}{\arctg 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-4)}{\arctg 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x}{\arctg 3x} \cdot (x-4) \cdot \frac{1}{3} \right) = -\frac{4}{3}$

Відповідь. Д.

Варіант 2. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{x^2 + 3x}$.

А	Б	В	Г	Д
1	0	$\frac{4}{3}$	∞	$-\frac{4}{3}$

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{x(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin 4x}{4x} \cdot \frac{1}{x+3} \cdot 4 \right) = \frac{4}{3}.$

Відповідь. В.

Завдання 12 перевіряє вміння застосовувати першу чудову границю до пошуку границь функцій, що містять тригонометричні і обернені тригонометричні функції у яких виникають невизначеності виду $\left[\frac{0}{0} \right]$.

Вправи для корегування

12. Обчисліть границю:

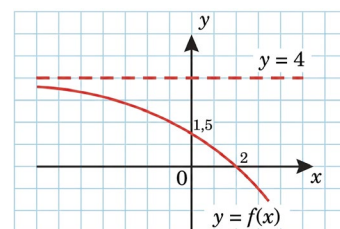
1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \cdot \arctg x};$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\sin 2x \operatorname{tg} 17x}.$

Завдання 13

Варіант 1. За графіком функції $f(x)$ (див. рисунок) знайдіть $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$

А	Б	В	Г	Д
2	1,5	4	$-\infty$	$+\infty$

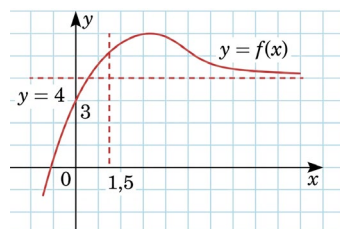


Розв'язання. За графіком функції встановлюємо що при $x \rightarrow -\infty$ значення функції наближаються до 4, тобто $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4.$

Відповідь. В.

Варіант 2. За графіком функції $f(x)$ (див. рисунок) знайдіть $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$

А	Б	В	Г	Д
1,5	3	$+\infty$	4	$-\infty$



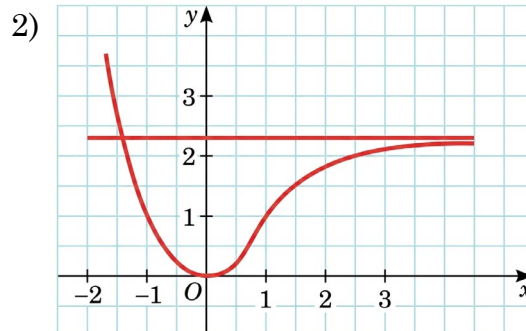
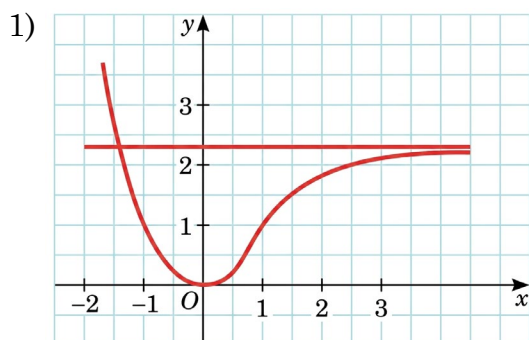
Розв'язання. За графіком функції встановлюємо що при $x \rightarrow +\infty$ значення функції наближаються до 4, тобто $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4.$

Відповідь. Г.

Завдання 13 перевіряє вміння користуючись ескізом графіка функції визначати границю функції на нескінченності.

Вправи для корегування

13. Знайдіть границю при $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ функції, графік якої зображено на рисунку:



Завдання 14

Варіант 1. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(4 + \frac{2}{x^3}\right) \left(-5 - \frac{7}{x}\right)$.

А	Б	В	Г	Д
20	-20	0	$+\infty$	$-\infty$

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(4 + \frac{2}{x^3}\right) \left(-5 - \frac{7}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(4 + \frac{2}{x^3}\right) \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-5 - \frac{7}{x}\right) = 4 \cdot (-5) = -20$.

Відповідь. Б.

Варіант 2. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x^5} - 5\right) \left(\frac{2}{x^2} - 4\right)$.

А	Б	В	Г	Д
20	-20	6	$+\infty$	0

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x^5} - 5\right) \left(\frac{2}{x^2} - 4\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x^5} - 5\right) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x^2} - 4\right) = -5 \cdot (-4) = 20$.

Відповідь. А.

Завдання 14 перевіряє вміння обчислювати границі функції на нескінченності, використовуючи теореми про арифметичні дії над границями функцій.

Вправи для корегування

14. Обчисліть границю:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x^9} + 1\right)$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6}{x^5} + \frac{4}{x^2} + 9\right)$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{x^3} - \frac{7}{x} - 21\right)$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{x^2} - 7\right)$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{x^3} + 1\right) \cdot \left(-\frac{8}{x^2} - 2\right)$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{x^6} - 2\right) \cdot \left(-\frac{6}{x^{10}} - 3\right)$.

Завдання 15

Варіант 1. Знайдіть рівняння горизонтальної асимптоти графіка функції $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$.

А	Б	В	Г	Д
$y = -2$	$y = 1$	$y = 3$	$x = 1$	$y = 2$

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-3}{x-1} = 2$, тому $y = 2$ — горизонтальна асимптота.

Відповідь. Д.

Варіант 2. Знайдіть рівняння горизонтальної асимптоти графіка функції $f(x) = \frac{3x-4}{x-2}$.

А	Б	В	Г	Д
$y = -3$	$y = -4$	$y = 2$	$y = 3$	$x = 2$

Відповідь. 1 – Д, 2 – Г, 3 – Б.

Завдання 16 має за мету перевірку уміння обчислювати границю в точці коли в якій виникає невизначеність виду $\left[\frac{0}{0} \right]$ за допомогою скорочення множника, який безпосередньо впливає на цю невизначеність.

Вправи для корегування

16. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4};$

2) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 64}{x^2 + 8x}.$

Завдання 17

Варіант 1. Установіть відповідність між початком речення (1–3) та завершенням речення (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

Початок речення

1 Значення функції $f(x) = \frac{1}{x}$ в точці $x = 0$

2 Значення правосторонньої границі функції $f(x) = \frac{1}{x}$ в точці $x = 0$

3 Значення лівосторонньої границі функції $f(x) = \frac{1}{x}$ в точці $x = 0$

Завершення речення

А дорівнює $-\infty$.

Б дорівнює $+\infty$.

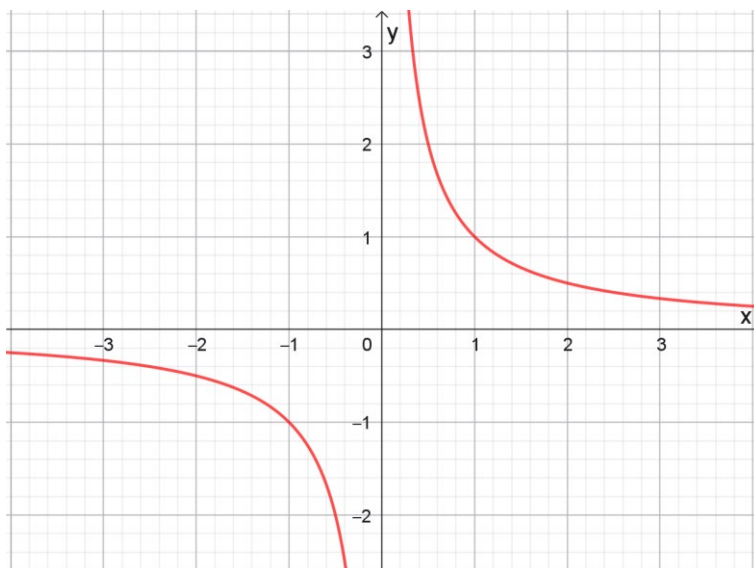
В дорівнює 0.

Г дорівнює 1.

Д не існує.

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

Розв'язання.



1) Функція $f(x) = \frac{1}{x}$ не визначена в точці $x = 0$, тому значення функції $f(x) = \frac{1}{x}$ в точці $x = 0$ не існує.

2) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Відповідь. 1 – Д, 2 – А, 3 – Б.

Варіант 2. Установіть відповідність між початком речення (1–3) та завершенням речення (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

Початок речення

1 Значення правосторонньої границі функції

$$f(x) = \frac{1}{x-2} \text{ в точці } x = 2$$

2 Значення лівосторонньої границі функції

$$f(x) = \frac{1}{x-2} \text{ в точці } x = 2$$

3 Значення функції $f(x) = \frac{1}{x-2}$ в точці $x = 2$

Завершення

речення

А дорівнює $-\infty$.

Б дорівнює $+\infty$.

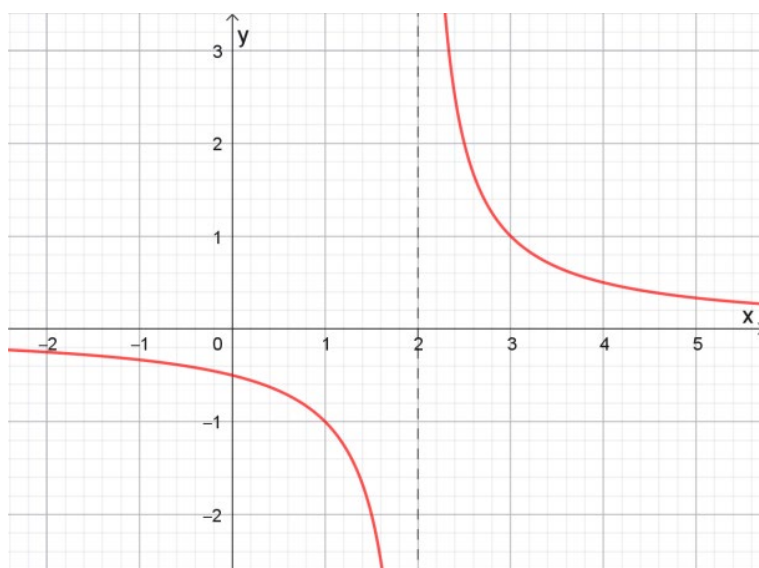
В дорівнює 0.

Г дорівнює 1.

Д не існує.

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

Розв'язання.



$$1) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty.$$

3) Функція $f(x) = \frac{1}{x-2}$ не визначена в точці $x = 2$, тому значення функції

$$f(x) = \frac{1}{x-2} \text{ в точці } x = 2 \text{ не існує.}$$

Відповідь. 1 – Б, 2 – А, 3 – Д.

Завдання 17 перевіряє уміння визначити нескінченну границю функції, попередньо побудувавши ескіз цього графіка.

Вправи для корегування

17. Побудуйте ескіз графіка функції $f(x)$ та установіть її ліву і праву границю в точці x_0 :

1) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x_0 = 0$;

2) $f(x) = \frac{1}{3-x}$, $x_0 = 3$.

Завдання 18

Варіант 1. Установіть відповідність між функцією, яка задана формулою (1–3) та рівняннями всіх асимптот (А–Д) функції.

Функція

1 $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$

2 $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

3 $f(x) = \frac{3x^2+2x-1}{x-1}$

Рівняння асимптот

А $x = 1$; $y = 3x + 5$

Б $x = 1$; $y = 3x - 5$

В $x = -1$; $y = 3$

Г $x = -1$; $x = 1$; $y = 0$

Д $x = -1$; $x = 1$

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

Розв'язання.

1) $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x-2}{x+1} = \left[\frac{-5}{-0} \right] = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x-2}{x+1} = \left[\frac{-5}{+0} \right] = -\infty$, тому $x = -1$ — вертикальна асимптота.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-2}{x+1} = 3$, тому $y = 3$ — горизонтальна асимптота.

2) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x^2-1} = \left[\frac{1}{+0} \right] = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x^2-1} = \left[\frac{1}{-0} \right] = -\infty$, тому $x = -1$ — вертикальна асимптота.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^2-1} = \left[\frac{1}{-0} \right] = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2-1} = \left[\frac{1}{+0} \right] = +\infty$, тому $x = 1$ — вертикальна асимптота.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2-1} = 0$, тому $y = 0$ — горизонтальна асимптота.

3) $f(x) = \frac{3x^2+2x-1}{x-1}$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2+2x-1}{x-1} = \left[\frac{4}{-0} \right] = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2+2x-1}{x-1} = \left[\frac{4}{+0} \right] = +\infty$, тому $x = 1$ — вертикальна асимптота.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+2x-1}{x-1} = \infty$, тому горизонтальних асимптот функція не має.

Нехай $y = kx + b$ — рівняння похилої асимптоти,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+2x-1}{x^2-x} = 3, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2+2x-1}{x-1} - 3x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2+2x-1-3x^2+3x}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x-1}{x-1} = 5, \text{ отже, } y = 3x + 5 \text{ — рівняння похилої}$$

асимптоти.

Відповідь. 1 — В, 2 — Г, 3 — А.

Варіант 2. Установіть відповідність між функцією, яка задана формулою (1–3) та рівняннями всіх асимптот (А–Д) функції.

Функція

1 $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$

2 $f(x) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{x - 3}$

3 $f(x) = \frac{3x - 5}{x + 3}$

Рівняння асимптот

А $x = 3; y = 3x + 7$

Б $x = 3; y = 3x - 11$

В $x = -3; y = 3$

Г $x = -3; x = 3; y = 0$

Д $x = -3; x = 3$

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

Розв'язання.

1) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$, $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x}{x^2 - 9} = \left[\frac{-3}{+0} \right] = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x}{x^2 - 9} = \left[\frac{-3}{-0} \right] = +\infty$, тому $x = -3$ — вертикальна асимптота.

$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{x^2 - 9} = \left[\frac{3}{-0} \right] = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{x^2 - 9} = \left[\frac{3}{+0} \right] = +\infty$, тому $x = 3$ — вертикальна асимптота.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 9} = 0$, тому $y = 0$ — горизонтальна асимптота.

2) $f(x) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{x - 3}$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x - 3} = \left[\frac{20}{-0} \right] = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x - 3} = \left[\frac{20}{+0} \right] = +\infty$, тому $x = 3$ — вертикальна асимптота.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x - 3} = \infty$, тому горизонтальних асимптот функція не має.

Нехай $y = kx + b$ — рівняння похилої асимптоти,

$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - 3x} = 3$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - 2x - 1}{x - 3} - 3x \right) =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - 2x - 1 - 3x^2 + 9x}{x - 3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x - 1}{x - 1} = 7$, отже, $y = 3x + 7$ — рівняння похилої асимптоти.

3) $f(x) = \frac{3x - 5}{x + 3}$, $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{3x - 5}{x + 3} = \left[\frac{-14}{-0} \right] = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{3x - 5}{x + 3} = \left[\frac{-14}{+0} \right] = -\infty$, тому $x = -3$ — вертикальна асимптота.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 5}{x + 3} = 3$, тому $y = 3$ — горизонтальна асимптота.

Відповідь. 1 — Г, 2 — А, 3 — В.

Завдання 18 мало за мету перевірити уміння досліджувати дробово-раціональні функції на асимптоти.

Вправи для корегування

18. Дослідіть функцію $f(x)$ на асимптоти:

1) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$;

2) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$;

3) $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 4}{x - 1}$;

4) $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 - 1}$.

Завдання 19

Варіант 1. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x)$.

Розв'язання.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x} - x)(\sqrt{x^2 + 3x} + x)}{(\sqrt{x^2 + 3x} + x)} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{(\sqrt{x^2 + 3x} + x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x}{x}}{\left(\frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{x} + \frac{x}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\left(\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1\right)} = \frac{3}{1 + 1} = 1,5.$$

Відповідь. 1,5.

Варіант 2. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 5x})$.

Розв'язання.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 5x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 + 5x})(x + \sqrt{x^2 + 5x})}{(x + \sqrt{x^2 + 5x})} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x}{(x + \sqrt{x^2 + 5x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-5x}{x}}{\left(\frac{x}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + 5x}}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5}{\left(1 + \sqrt{1 + \frac{5}{x}}\right)} = \frac{-5}{1 + 1} = -2,5.$$

Відповідь. -2,5.

Завдання 19 перевіряло уміння обчислювати границі функцій, що містять ірраціональні вирази, на нескінченності.

Вправи для корегування

19. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 5x})$;

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - x} - x)$;

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x)$;

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$.

Завдання 20

Варіант 1. Відомо, що $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 11$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -6$, $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = -5$. Обчисліть

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2f(x) + 3h(x)}{g(x) + 16}.$$

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2f(x) + 3h(x)}{g(x) + 16} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (2f(x) + 3h(x))}{\lim_{x \rightarrow \infty} (g(x) + 16)} = \frac{2 \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + 3 \lim_{x \rightarrow \infty} h(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} 16} = \frac{2 \cdot 11 + 3 \cdot (-5)}{-6 + 16} = 0,7.$$

Відповідь. 0,7.

Варіант 2. Відомо, що $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 13$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 7$, $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = -8$. Обчисліть

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3f(x) - 2g(x)}{h(x) + 18}.$$

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3f(x) - 2g(x)}{h(x) + 18} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (3f(x) - 2g(x))}{\lim_{x \rightarrow \infty} (h(x) + 18)} = \frac{3 \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - 2 \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} 18} = \frac{3 \cdot 13 - 2 \cdot 7}{-8 + 18} = 2,5.$$

Відповідь. 2,5.

Завдання 20 перевіряє уміння використовувати теореми про арифметичні дії над границями функцій на нескінченності.

Вправи для корегування

20. Відомо, що $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -2$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -10$, $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 6$. Знайдіть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)};$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)h(x)}{g(x)};$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3f(x) + h(x)}{2g(x) + 15};$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3g(x)}{5h(x)}.$

Завдання 21

Варіант 1. Запишіть рівняння похилої асимптоти графіка функції $f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 4}{x - 2}$.

Розв'язання. Нехай $y = kx + b$ — рівняння похилої асимптоти,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 4}{x^2 - 2x} = 2,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 3x + 4}{x - 2} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 3x + 4 - 2x^2 + 4x}{x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x + 4}{x - 2} =$$

$= 7$, отже, $y = 2x + 7$ — рівняння похилої асимптоти.

Відповідь. $y = 2x + 7$.

Варіант 2. Запишіть рівняння похилої асимптоти графіка функції $f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 3}{x + 2}$.

Розв'язання. Нехай $y = kx + b$ — рівняння похилої асимптоти,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 3}{x^2 + 2x} = 3,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 2x - 3}{x + 2} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 2x - 3 - 3x^2 - 6x}{x + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x - 3}{x + 2} =$$

$= -4$, отже, $y = 3x - 4$ — рівняння похилої асимптоти.

Відповідь. $y = 3x - 4$.

Завдання 21 перевіряє уміння досліджувати функцію на похилі асимптоти.

Вправи для корегування

21. Запишіть рівняння похилої асимптоти для функції $f(x)$:

1) $f(x) = \frac{5x^3 - 4x + 7}{x^2 + 2x - 3}$;

2) $f(x) = \frac{2x^5 - x^2 + 1}{x^4 - 1}$.

Завдання 22

Варіант 1. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}$.

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}$.

Нехай $x - \frac{\pi}{4} = y$, тоді $x = \frac{\pi}{4} + y$ і $y \rightarrow 0$.

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \sin 2\left(\frac{\pi}{4} + y\right)}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2y\right)}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2y}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 y}{y^2} = 2.$$

Відповідь. 2.

Варіант 2. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos 3x + 1}{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2}$.

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos 3x + 1}{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2}$.

Нехай $x - \frac{\pi}{3} = y$, тоді $x = \frac{\pi}{3} + y$ і $y \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \sin 2\left(\frac{\pi}{4} + y\right)}{y^2} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos 3\left(\frac{\pi}{3} + y\right) + 1}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos(\pi + 3y) + 1}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3y}{y^2} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{3y}{2}}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(2 \cdot \frac{\sin \frac{3y}{2}}{\frac{3y}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{3y}{2}}{\frac{3y}{2}} \cdot \frac{9}{4} \right) = \frac{9}{2} = 4,5. \end{aligned}$$

Відповідь. 4,5.

Завдання 22 перевіряє вміння використовувати першу чудову границю з використанням заміни змінних.

Вправи для корегування

22. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{8}} \frac{1 - \sin 4x}{\left(x - \frac{\pi}{8}\right)^2}$;

2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos 6x + 1}{\left(\frac{\pi}{6} - x\right)^2}$.