

11

Тема 1.

Границя та неперервність функції

Урок 3. Урок —практикум. Розв'язування задач. Границя функції в точці

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

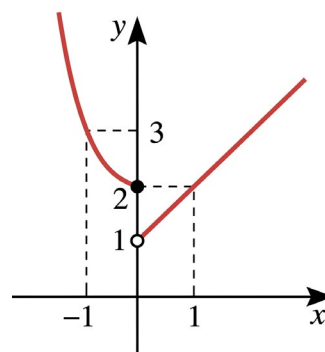
I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) навчитеся за графічною ілюстрацією функції встановлювати чи має функція границю функції у заданих точках та знаходити цю границю;
- 2) дізнаєтесь як обчислювати границю функції в точці за допомогою означення;
- 3) навчитеся доводити, що функція не має границі в певних точках;
- 4) навчитеся використовувати набуті знання щодо розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Знайдіть границю $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 2x^2 + 1)$.
2. Знайдіть границю $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{2x - 4}$.
3. Чи має границю функція, задана графічно (див. рисунок) у точці $x = 0$?
4. Обчисліть границю послідовності $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3n + 2n^2}{5 - 3n^2}$.
5. Чи має границю функція $f(x) = \frac{|x - 2|}{2 - x}$ у точці $x = 2$?



III. Знаходження границь (або їх відсутності) функцій в точках за допомогою графіків

Нехай задано графік функції $y = f(x)$. Потрібно дослідити (без доведення), чи існує границя функції в точці $x = a$, а також по можливості знайти цю границю, якщо вона існує.

Наведемо орієнтовний алгоритм дій у цій ситуації:

1) Знайдіть на осі абсцис точку $x = a$ та уявіть собі багато точок на цій осі, які знаходяться дуже близько до неї, але таких, щоб у цих точках існувало значення функції. (Можна уявно провести через ці точки вертикальні лінії до перетину з графіком функції).

2) Уявіть, що ви рухаєтесь по цим точкам графіком функції зліва направо та справа наліво наближаючись то точки $x = a$. Фіксуйте до якого значення наближаються ординати точок на графіку.

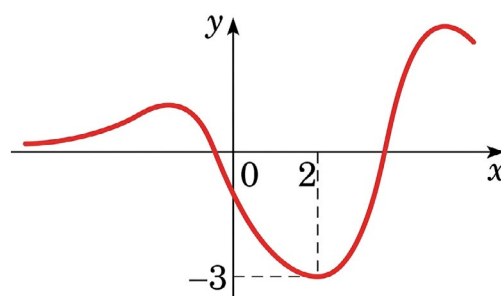
3) Якщо при наближенні до a з обох боків значення функції наближається до одного і того ж числа b , то можна сказати, що $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

4) Якщо не можна на осі абсцис обрати нескінченно багато точок близьких до a або значення функції в цих точках при наближенні до a з обох боків не наближаються до одного якогось числа або «тікають» в нескінченність, то границі функції $f(x)$ в точці $x = a$ не існує.

Приклад 1. Чому дорівнює границя функції $f(x)$, графік якої зображено на рисунку в точці $x = 2$?

Розв'язання. При наближенні до $x = 2$ з обох боків значення функції наближається до одного і того ж числа -3 , то можна сказати, що $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -3$.

Відповідь. -3 .

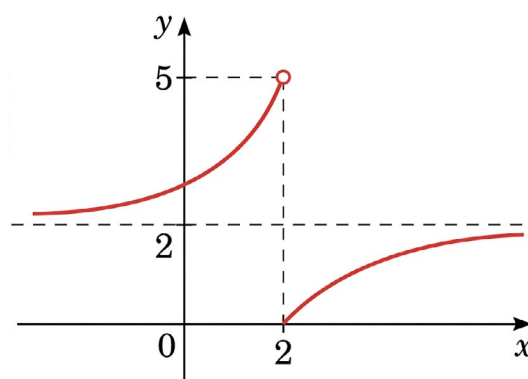


Приклад 2. Чому дорівнює значення функції $f(x)$, графік якої зображено на рисунку в точці $x = 2$? Чи існує границя функції в цій точці?

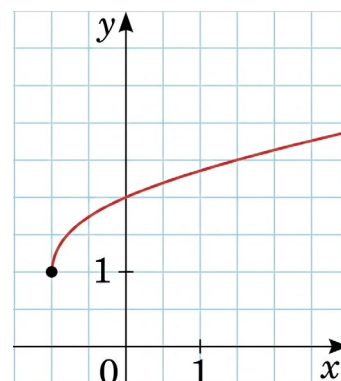
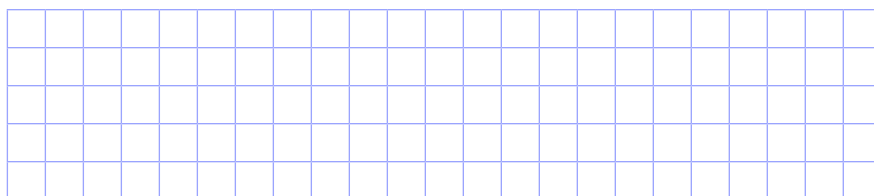
Розв'язання. $f(2) = 0$.

При наближенні до $x = 2$ зліва, значення функції наближається до 5, а при наближенні до $x = 2$ справа, значення функції наближається до 0, тому функція $f(x)$ не має границі в точці $x = 2$.

Відповідь. 0; не має.



Приклад 3. Чи існує границя функції $f(x)$, графік якої зображено на рисунку в точці $x = -1$? У разі ствердної відповіді обчисліть цю границю.

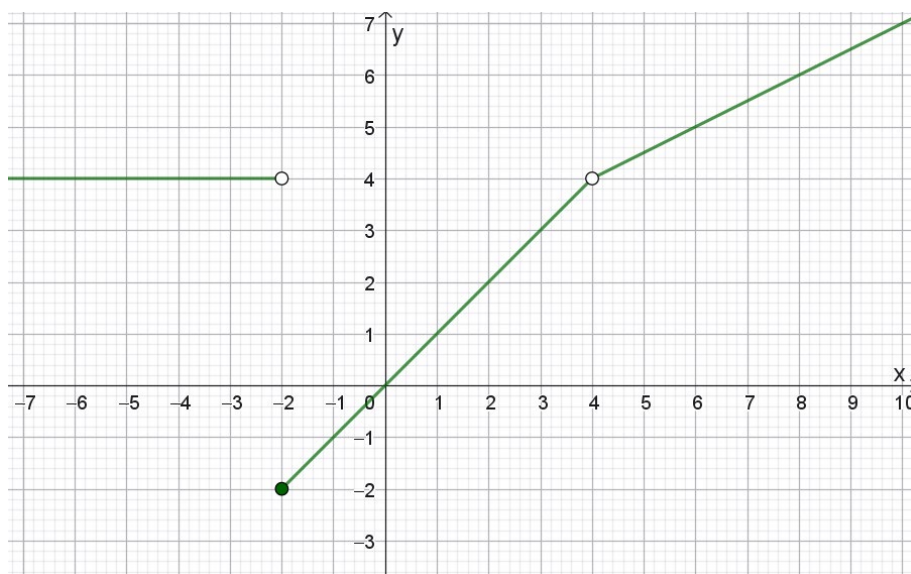


IV. Побудова графіків функцій та знаходження границь у певних точках

Розглянемо декілька прикладів, де графік функції не заданий, а його потрібно спочатку побудувати. Далі використовуємо алгоритм, який ми розглянули в попередньому пункті.

Приклад 4. Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} 4, & x < -2, \\ x, & -2 \leq x < 4, \\ 0,5x + 2, & x > 4 \end{cases}$ та установіть чи існує границя функції $f(x)$ в точках $x = -2$ та $x = 4$. У разі ствердної відповіді обчисліть цю границю.

Розв'язання.

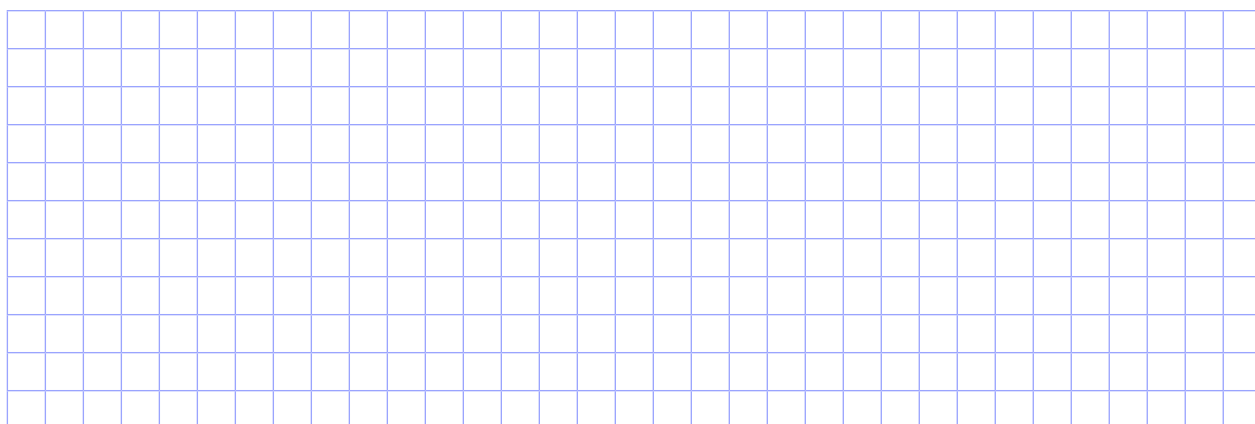


При наближенні до $x = -2$ зліва, значення функції наближається до 4, а при наближенні до $x = -2$ справа, значення функції наближається до -2 , тому функція $f(x)$ не має границі в точці $x = -2$.

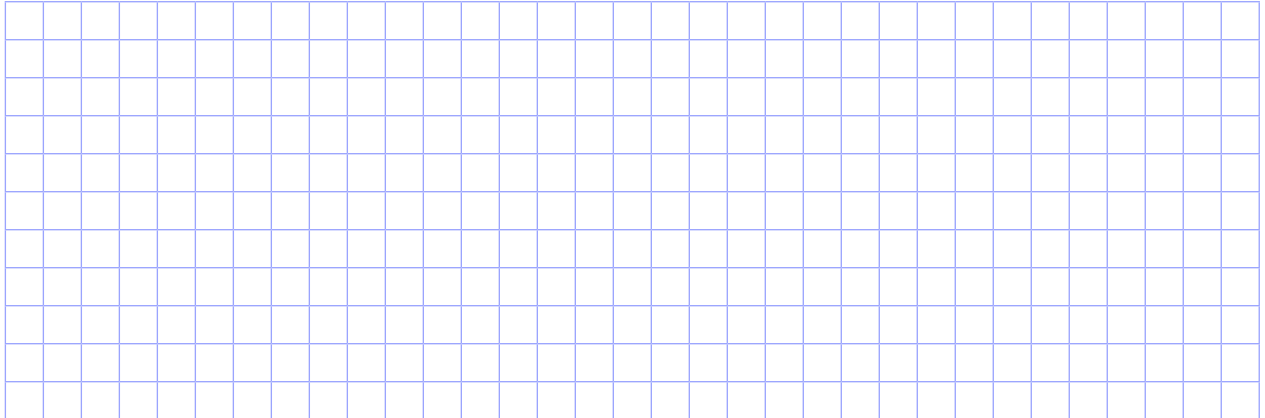
При наближенні до $x = 4$ з обох боків значення функції наближається до одного і того ж числа 4, то можна сказати, що $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 4$.

Відповідь. У точці $x = -2$ функція границі не має, а в точці $x = 4$ границя дорівнює 4.

Приклад 5. Побудуйте графік функції $f(x) = \frac{2}{|x-1|}$ та установіть чи існує границя функції $f(x)$ в точках $x = 1$ та $x = 3$. У разі ствердної відповіді обчисліть цю границю.



Приклад 6. Побудуйте графік функції $f(x) = \frac{|x^2 - 9|}{x - 3}$ та установіть чи існує границя функції $f(x)$ в точці $x = 3$. У разі ствердної відповіді обчисліть цю границю.

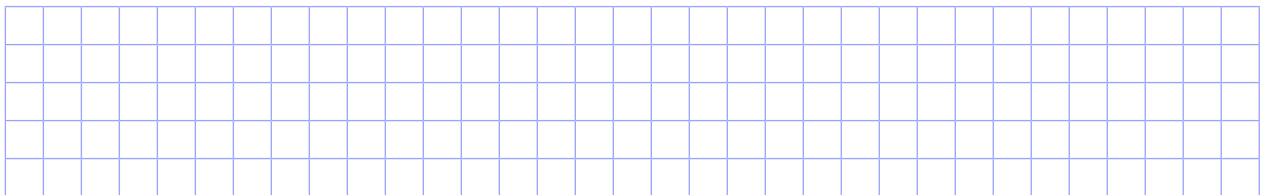


V. Обчислення границь функцій за допомогою означення

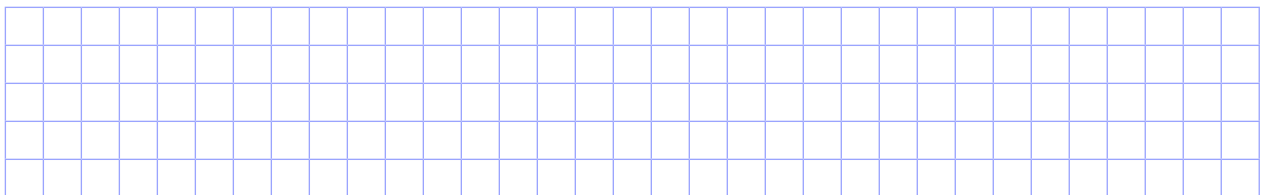
Нагадаємо означення границі функції в точці за Гейне.

Означення. Число b називають **границею** функції f у точці a , якщо для будь-якої збіжної до a послідовності $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ значень аргументу функції f таких, що $a_n \neq a$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, відповідна послідовність $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n), \dots$ значень функції збігається до числа b .

Приклад 7. За допомогою означення знайдіть границю функції $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1}{x + 2}$.



Приклад 8. За допомогою означення знайдіть границю функції $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 4x + 3}$.



Приклад 9. Доведіть,, що $\lim_{x \rightarrow 0} x \mathfrak{D}(x) = 0$, де $\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ — функція Діріхле.

Доведення. Розглянемо довільну послідовність x_n таку, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ ($x_n \neq 0$) для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Тоді на підставі теорем про границі послідовностей маємо:

Оскільки $|\mathfrak{D}(x)| \leq 1$, то послідовність $\mathfrak{D}(x_n)$ — обмежена.

Тоді послідовність $x_n \mathfrak{D}(x_n)$ являє собою добуток нескінченно малої та обмеженої послідовностей, а отже є нескінченно малою, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \mathfrak{D}(x_n) = 0$

Оскільки послідовність x_n обрано довільно, то $\lim_{x \rightarrow 0} x \mathfrak{D}(x) = 0$, що й треба було довести.

VI. Доведення того, що функція не має границі в певній точці

Якщо користуватися означенням границі функції в точці за Гейне для доведення того, що функція $f(x)$ не має границі в певній точці a , то слід запам'ятати два основні методи:

- 1) розглянути довільну послідовність a_n , усі члени якої відмінні від a і яка збігається до числа a , а після цього довести, що послідовність $f(a_n)$ – розбіжна;
- 2) підібрати дві різні довільні послідовності a_n і b_n , усі члени яких відмінні від a і які збігаються до числа a , а після цього довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$.

Приклад 10. Доведіть, що функція Діріхле $\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ не має границі в жодній точці.

Доведення. Нехай $x_0 \in \mathbb{R}$ – довільне дійсне число.

Нехай a_n — послідовність раціональних чисел така, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ і $a_n \neq x_0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Нехай b_n — послідовність раціональних чисел така, що $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x_0$ і $b_n \neq x_0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Послідовності a_n і b_n існують, оскільки в будь-якому околі точки x_0 існує нескінченно багато як раціональних так і ірраціональних чисел (можна навести приклади

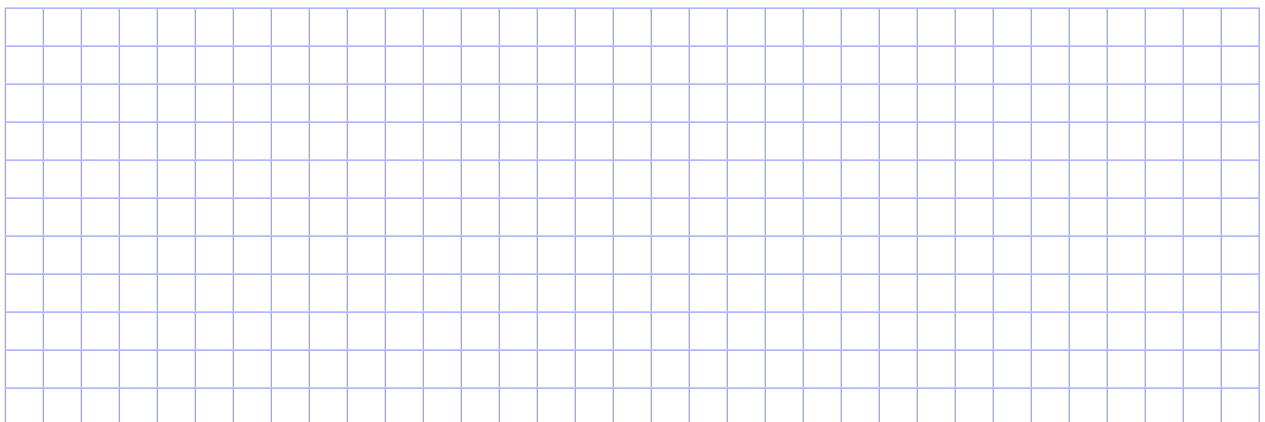
таких послідовностей, наприклад, $a_n = \frac{1}{n} + x_0$, $b_n = \frac{\sqrt{2}}{n} + x_0$, $n \in \mathbb{N}$).

Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{D}(a_n) = 1$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{D}(b_n) = 0$.

Ми навели приклад двох збіжних до довільного числа x_0 послідовностей, члени яких відмінні від x_0 і відповідні їм послідовності значень функції Діріхле мають різні границі.

Отже, функція Діріхле не має границі в жодній точці, що й треба було довести.

Приклад 11. Доведіть, що функція $f(x) = \frac{1}{x}$ не має границі в точці $x = 0$.



VII. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. На насосній станції встановлено електронний датчик тиску в трубопроводі. Після вмикання насоса тиск у трубі $p(t)$ (у Паскалях) змінюється з часом t (у секундах). Через цифрову фільтрацію сигналу в момент часу $t = 10$ сигнал не реєструється, але для усіх інших моментів часу тиск описується формулою
$$p(t) = \frac{5000t^2 - 30000t - 200000}{t - 10}.$$
 Обчисліть тиск у трубі у момент часу $t = 10$, якщо відомо, що різких змін тиску у трубі в цей час не відбувалося.

Історична довідка

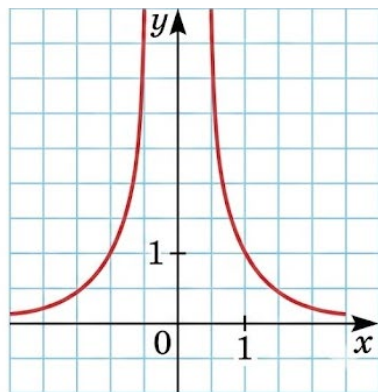
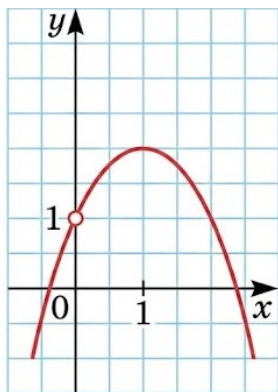
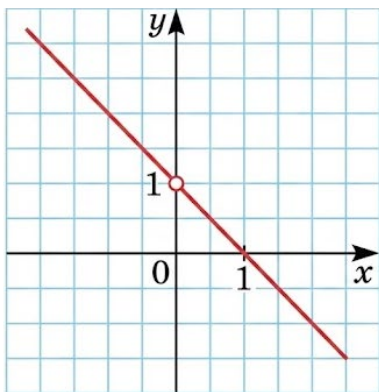
Поняття похідної, диференціала й інтеграла, як і весь математичний аналіз, нині ґрунтуються на розробленому в XIX ст. методі границь, або, що по суті те саме, на методі нескінченно малих. Інакше було у XVII–XVIII ст.

Наприкінці XVII ст. в Європі сформувалися дві великі математичні школи, які існували протягом майже всього XVIII ст. Очолював одну з них Лейбніц. Як він сам, так і його учні та співробітники — Лопіталь, брати Бернуллі та його безпосередні послідовники, зокрема Ейлер, — жили й працювали переважно на континенті. Друга школа, попередниками якої були Валліс і Барроу, очолювана Ньютоном, складалася з англійських і шотландських учених. До їхнього числа належав і Маклорен. Обидві школи створили нові потужні алгоритми, що по суті привели до однакових результатів — до створення диференціального та інтегрального числення. Проте англійці дотримувалися методу флюксій і ньютонівського методу границь. Лейбніц же виходив з учення про нескінченно малі різниці скінченних величин. (Глейзер Г.І. Історія математики в школі).

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (5–10 хв)

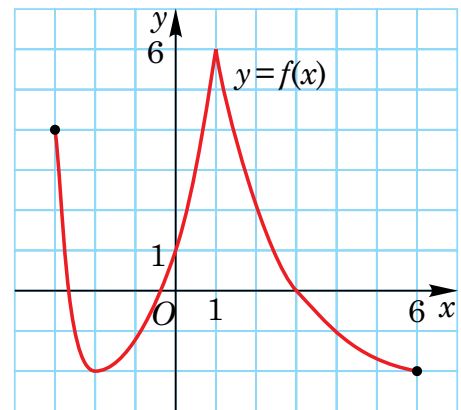
Рівень А

1. Установіть чи існує границя функції в точці $x = 0$ (див. рисунок). У разі ствердної відповіді знайдіть цю границю:



2. За допомогою графіка функції $y = f(x)$ (див. рисунок), знайдіть:

1) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$;
 3) $\lim_{x \rightarrow 3,5} f(x)$; 4) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.



3. Користуючись означенням обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 6x + 9)$; 2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - 2 \operatorname{tg} x)$;
 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{x - 2}$; 4) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{6}} \frac{3 - 2x}{6x + 1}$.

4. Користуючись означенням обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{5(x - 5)}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{4(x - 2)}$;
 3) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x + 1)}{3(x^2 - 1)}$; 4) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x(x + 3)}{x^2 - 9}$.

5. Побудуйте графік функції $f(x)$ та установіть чи має ця функція границю в точці x_0 :

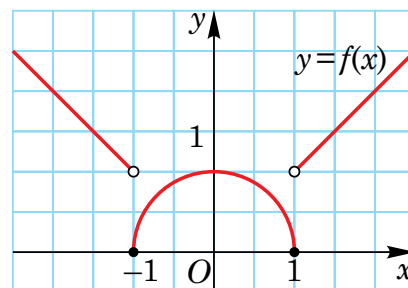
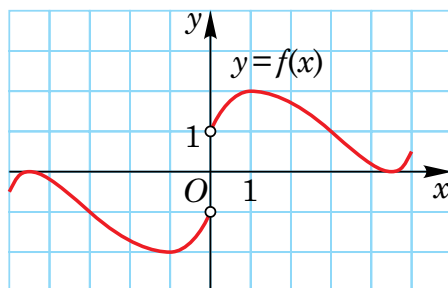
1) $f(x) = (x - 3)^3$, $x_0 = 3$; 2) $f(x) = |x + 2|$, $x_0 = -2$.

У разі ствердної відповіді обчисліть цю границю.

6. Знайдіть $\lim_{x \rightarrow 2} (x\sqrt{x + 2} - x^2 - x)$.

Рівень В

1. Установіть чи існує границя функції в точках $x = 0$, $x = -1$ та $x = 1$ (див. рисунок). У разі ствердної відповіді знайдіть цю границю:



2. Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} -2x + 3, & x \leq 1, \\ 3x - 5, & x > 1 \end{cases}$ та установіть чи має функція границю в точці $x = 1$.

3. Побудуйте графік функції $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$ та установіть чи має функція границю в точці $x = 1$.

4. Обчисліть, користуючись означенням границі функції в точці:

1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 9};$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2};$

3) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + x - 2};$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}.$

5. За допомогою означення доведіть, що:

1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6;$

2) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -4;$

3) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} = -5;$

4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = -2.$

6. Доведіть, що функція $f(x)$ не має границі в точці x_0 :

1) $f(x) = \cos \frac{1}{x - \pi}, x_0 = \pi;$

2) $f(x) = \sin \frac{1}{x + 1}, x_0 = -1.$

7. Побудуйте графік функції $f(x)$ та установіть чи має функція границю в точці x_0 :

1) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2}, & x \neq -2; \\ 2, & x = -2, \end{cases} \quad x_0 = -2;$

2) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 8x - 9}{\sqrt{x} - 3}, & x \geq 0, x \neq 9; \\ -10, & x = 9 \end{cases} \quad x_0 = 9.$

8. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cos \frac{1}{x};$

2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x \mathfrak{D}(x).$

9. Установіть чи має функція $f(x)$ границю в точці x_0 :

1) $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$

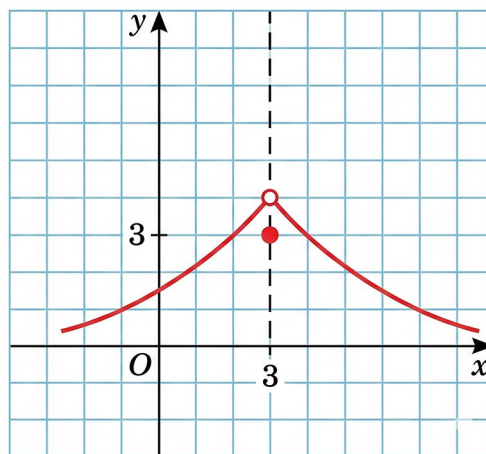
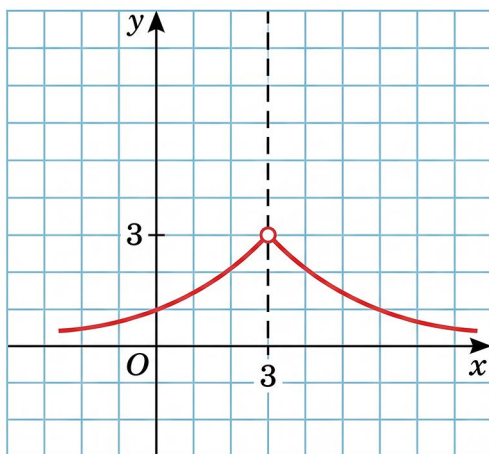
2) $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 1, \\ -x, & x < 1, \end{cases} \quad x_0 = 1.$

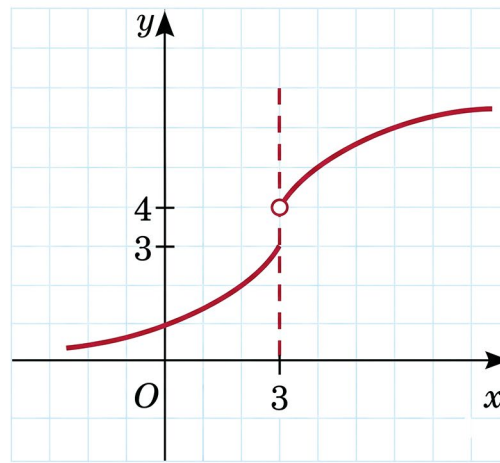
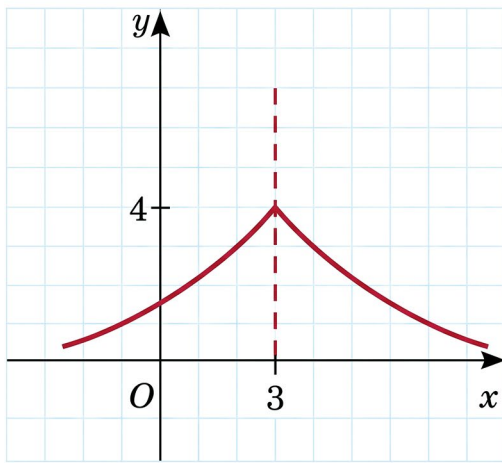
10. Доведіть, що функція $f(x)$ не має границі в точці x_0 :

1) $f(x) = \frac{1}{x - 3}, x_0 = 3;$

2) $f(x) = \frac{1}{\sin x}, x_0 = 0.$

11. Які з функцій, заданих графічно, мають границю в точці $x = 3$ (див. рисунок):





12. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x^2 - 3x};$

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{2x+5} - 3}.$

Рівень С

1. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \sin(x-1) \cos\left(\frac{\pi}{x-1}\right);$

2) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9) \arctg\left(\frac{1}{x-3}\right).$

2. Відомо, що $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$. Чи вірно, що $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ або $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$? Відповідь обґрунтуйте.

3. Знайдіть значення параметра a при яких функція $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} - 8, & x < 16, \\ |x - 18|, & x \geq 16 \end{cases}$ має границю в кожній точці області визначення.

4. Доведіть, що функція $y = f(x)$ не має границі в точці $x = a$ та побудуйте графік функції $y = f(x)$:

1) $f(x) = 2 \cdot \frac{|x|}{x}, a = 0;$

2) $f(x) = 2\left(1 - \frac{|x|}{x}\right), a = 0.$

3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, a = 0;$

4) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}, a = 1.$

5. Функція f визначена на $\mathbb{R}$ і $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. Знайдіть границю $\lim_{x \rightarrow 0} f(\sqrt{x^2 + 1} - 1).$

6. Відомо, що функція $y = |f(x)|$ має границю в кожній точці $x_0 \in \mathbb{R}$. Чи можна стверджувати, що функція $y = f(x)$ має границю хоча б в одній точці $x_0 \in \mathbb{R}$?

Рефлексія

1. Я вмію, за графічною ілюстрацією функції встановлювати, чи має функція границю функції у заданих точках та знаходити цю границю.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

- | | | | |
|-----------|--|------------------------|----|
| 2. | Я вмію обчислювати границю функції в точці за допомогою означення. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я вмію доводити, що функція не має границі в певних точках. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

- 1.** Границя функції в точці та точність вимірювань.
- 2.** Дослідження границі функції з використанням комп'ютерних експериментів.
- 3.** Границі функції в задачах фізики та техніки.
- 4.** Границя функції в задачах цифрової обробки сигналів.
- 5.** Границя функції в точці та згладжування експериментальних даних.

