

11

Тема 1.

Границя та неперервність функції

Урок 4. Означення границі функції в точці за Коші

РОБОЧИЙ АРКУШ

(МОЄ ІМ'Я)

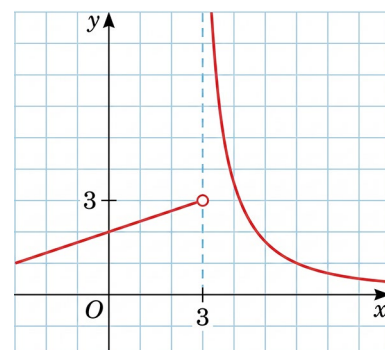
I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) навчитеся графічно ілюструвати поняття границі функції в точці за Коші;
- 2) дізнаєтесь означення границі функції в точці за Коші;
- 3) навчитеся доводити, використовуючи означення границі функції в точці за Коші, що функції не мають границі в певних точках;
- 4) навчитеся використовувати набуті знання щодо розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Знайдіть границю $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 5x - 13)$.
2. Знайдіть границю $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$.
3. Чому дорівнює границя $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x$.
4. Обчисліть границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 7n}}{n - 5}$.
5. Чи існує границя функції, графік якої зображено на рисунку в точці $x = 3$?



III. Графічна ілюстрація поняття границі функції в точці, за Коші

Нехай ε — деяке додатне число. На осі ординат розглянемо інтервал $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ (див. рисунок).

На осі абсцис йому відповідає такий інтервал I , який містить точку x_0 , що для будь-якого $x \in I \cap D(f)$, $x \neq x_0$, відповідні значення функції f належать проміжку $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, тобто виконуються нерівності

$$a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon.$$

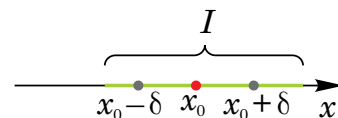
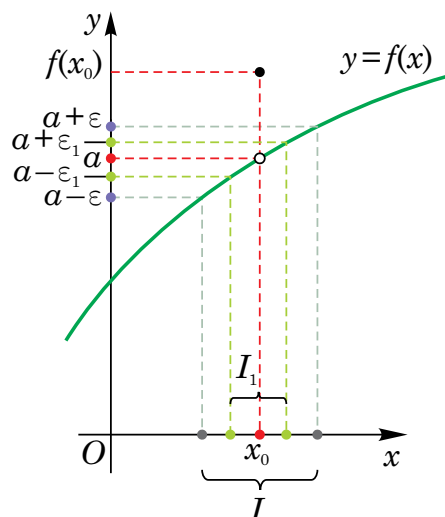
Іншими словами, для будь-якого $x \in I \cap D(f)$, $x \neq x_0$, виконується нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Звузимо проміжок на осі ординат, тобто розглянемо інтервал $(a - \varepsilon_1; a + \varepsilon_1)$, де $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$. Тоді для числа ε_1 можна вказати такий інтервал I_1 осі абсцис, який містить точку x_0 , що для будь-якого $x \in I_1 \cap D(f)$, $x \neq x_0$, виконується нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon_1$.

Якщо деякий інтервал I містить точку x_0 , то існує таке додатне число δ , що проміжок $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ належить I (див. рисунок).

Геометрично означення границі функції означає, що яку б смугу завширшки 2ε не взяли, знайдеться таке δ , що для всіх x з області визначення, які належать околу $(x_0 - \delta; x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$, значення функції $f(x)$ лежать у цій смугі. При зменшенні ε значення δ також зменшується.

Щоб краще зрозуміти залежності між ε і δ можете скористатися Geogebra-аплетом, який доступний за посиланням:



<https://www.geogebra.org/m/sznd39dh>



IV. Означення границі функції в точці, за Коші

Означення. Число a називають **границею функції** f у точці x_0 , якщо для будь-якого додатного числа ε існує таке додатне число δ , що для всіх $x \in D(f)$ з нерівностей $0 < |x - x_0| < \delta$ випливає нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Запишемо означення границі f у точці x_0 за допомогою символів:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in D(f) : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

Вимога $0 < |x - x_0|$ означає, що значення функції в точці x_0 не залежить від значення $f(x_0)$, а також дозволяє функції мати границю в точці, в якій функція не існує.

Доведемо, що означення границі функції в точці, за Коші і за Гейне еквівалентні.

1) Нехай $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, за Коші.

Тоді $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in D(f) : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$.

Тоді розглянемо довільну збіжну до x_0 послідовність x_n відмінних від x_0 значень аргументу функції $f(x)$, тоді для будь-якого додатного числа δ існує такий номер члена послідовності $n_0(\delta)$, що для всіх $n \geq n_0(\delta)$ виконується нерівність $0 < |x_n - x_0| < \delta$, звідки за означенням границі функції в точці за Коші слідує, що $|f(x_n) - a| < \varepsilon$, тобто число a є границею послідовності $f(x_n)$, а отже, число a – є границею функції $f(x)$ в точці x_0 за Гейне.

(Також наведемо наші міркування за допомогою символів

$\forall (x_n) \subset D(f) : x_n \neq x_0 \wedge x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow \exists n_0 = n_0(\delta) : \forall n \geq n_0 :$

$0 < |x_n - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - a| < \varepsilon \Rightarrow f(x_n) \rightarrow a$).

2) Нехай $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ за Гейне.

Припустимо від супротивного, що a не є границею функції $f(x)$, за Коші. Тоді із заперечення означення Коші маємо:

$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x \in D(f) : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| \geq \varepsilon$.

Нехай $\delta = \frac{1}{n}$, тоді $\forall n \in \mathbb{N} : \exists x_0 \in D(f) : 0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \Rightarrow |f(x_n) - a| \geq \varepsilon$.

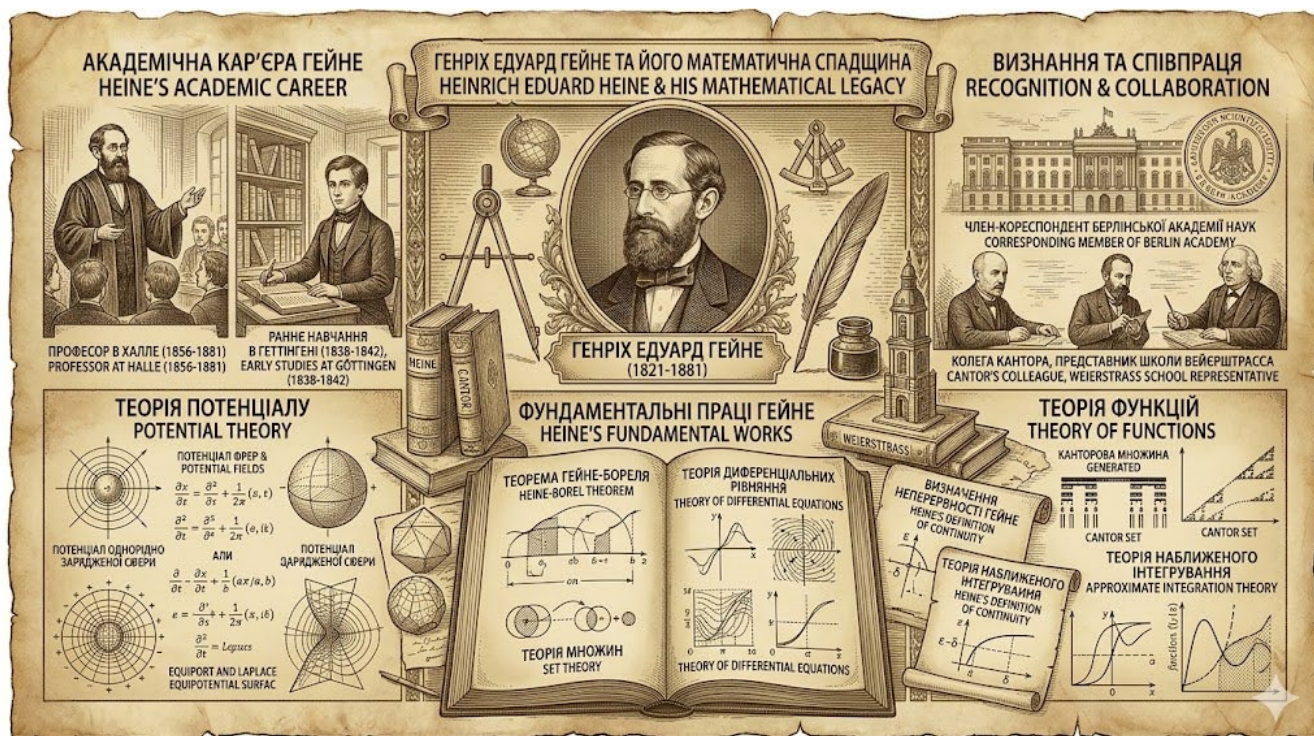
Із нерівності $0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ за теоремою про двох «конвоїрів» слідує, що границя послідовності x_n прямує до x_0 , але границя відповідних членів послідовності $f(x_n)$ не прямує до числа a . Отримали суперечність, а отже, a є границею функції $f(x)$ в точці x_0 за Коші.

Що й треба було довести.

Примітка. При доведенні, що число a є границею функції $f(x)$ у точці x_0 потрібно показати, що число δ залежить від додатного числа ε , тобто установити функційну залежність $\delta(\varepsilon)$.

Історична довідка

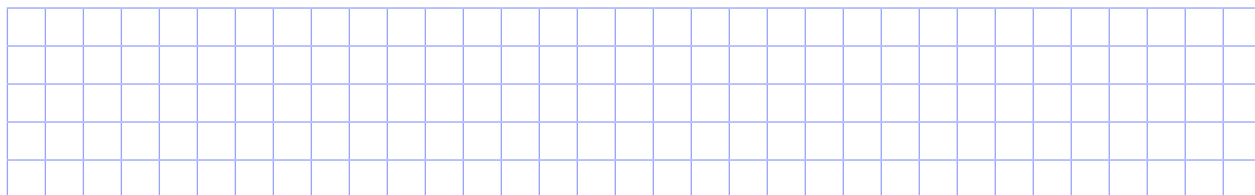
Генріх Едуард Гейне (1821–1881) — німецький математик, член-кореспондент Берлінської академії наук, член Геттінгенського наукового товариства. Колега і в багатьох питаннях соратник Кантора. Представник школи Вейерштрасса. Основні праці Гейне написані в галузі теорії потенціалу, теорії функцій і теорії диференціальних рівнянь.



Огюстен Луї Коші (1789–1857) — французький математик і механік, член Паризької академії наук, Лондонського королівського товариства, Петербурзької академії наук та інших академій. Розробив фундамент математичного аналізу, зробив величезний внесок в аналіз, алгебру, математичну фізику та багато інших галузей математики; один із засновників механіки суцільних середовищ. Його ім'я внесене до списку найвидатніших учених Франції, розміщеного на першому поверсі Ейфелевої вежі.



Приклад 1. В означенні границі функції в точці замість «...для будь-якого $\varepsilon > 0$...» було сказано «...для будь-якого ε ...». Покажіть, що при такому «означенні» ніяка функція не може мати границю в точці x_0 .



Приклад 2. В означенні границі функції в точці замість «...якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що...» було сказано «...для будь-яких $\varepsilon > 0$ і $\delta > 0$...». Покажіть, що при такому «означенні» границю в точці x_0 мають лише функції виду $f(x) = c$ (c — константа) при $x \neq x_0$. Причому в самій точці x_0 функція може бути як невизначена, так і визначена будь-яким чином.

Розв'язання. Для усіх функцій крім функції виду $f(x) = c$ (c — константа) при $x \neq x_0$ число δ є функціонально залежним від ε , тому якщо задати додатне число δ наперед, то можна його зменшити настільки щоб із нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$ не завжди слідуватиме, що $|f(x) - a| < \varepsilon$.

V. Приклади використання означення границі функції в точці, за Коші

Наведемо декілька прикладів використання означення границі функції в точці, за Коші.

Приклад 3. За допомогою означення границі функції в точці доведіть, що

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x + 5) = 8.$$

Розв'язання. Для кожного додатного числа ε розглянемо нерівність $|(3x + 5) - 8| < \varepsilon$.

Перетворивши її, отримаємо $|3x - 3| < \varepsilon$, $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Остання нерівність підказує яким чином для заданого додатного числа ε можна знайти потрібне додатне число δ .

Нехай $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, тоді з умови $0 < |x - 1| < \delta = \frac{\varepsilon}{3}$ випливає, що $|3x - 3| < \varepsilon$, звідки $|(3x + 5) - 8| < \varepsilon$.

Це означає що число 8 є границею функції $f(x) = 3x + 5$ у точці $x = 1$.

Приклад 4. За допомогою означення границі функції в точці доведіть, що

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{9x^2 - 1}{3x - 1} = 2.$$

Розв'язання. Функція $f(x) = \frac{9x^2 - 1}{3x - 1}$ при $x \neq \frac{1}{3}$ співпадає з функцією $y = 3x + 1$.

А оскільки значення границі не залежить від того, яким чином визначена (чи вза-

галі не визначена) функція в даній точці, то досить показати, що $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} (3x + 1) = 2$.

Розглянувши нерівність $|(3x + 1) - 2| < \varepsilon$.

Перетворивши її, отримаємо $|3x - 1| < \varepsilon$, $\left|x - \frac{1}{3}\right| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Тепер зрозуміло, що достатньо взяти $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, тоді з умови $0 < \left|x - \frac{1}{3}\right| < \delta = \frac{\varepsilon}{3}$ випливає, що $|3x - 1| < \varepsilon$, звідки $|(3x + 1) - 2| < \varepsilon$.

Це означає що число 2 є границею функції $f(x) = \frac{9x^2 - 1}{3x + 1}$ у точці $x = \frac{1}{3}$.

Приклад 5. За допомогою означення границі функції в точці доведіть, що $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin x = \frac{1}{2}$.

Розв'язання. $\left|\sin x - \frac{1}{2}\right| = \left|\sin x - \sin \frac{\pi}{6}\right| = 2 \left|\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right)\right| \cdot \left|\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)\right|$.

Оскільки $\left|\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)\right| \leq 1$ і $\left|\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right)\right| \leq \left|\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right|$, то

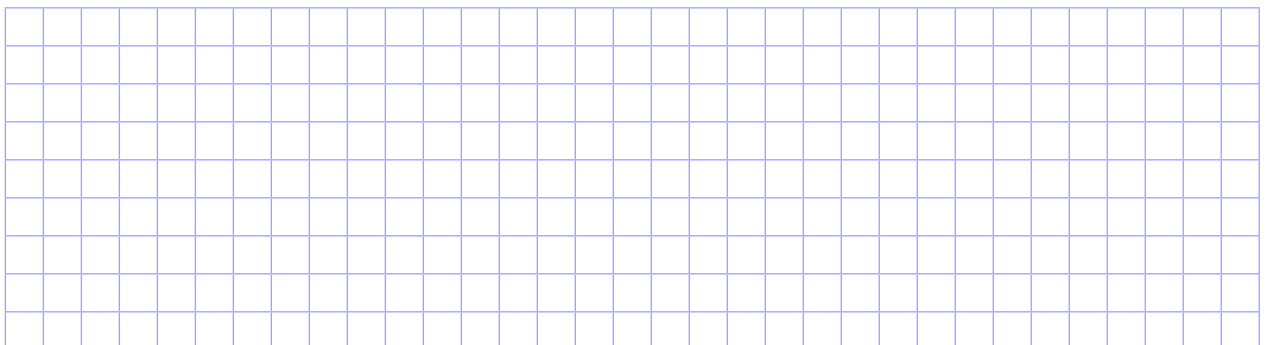
$\left|\sin x - \frac{1}{2}\right| \leq \left|x - \frac{\pi}{6}\right|$. Тепер зрозуміло, що при $\delta = \varepsilon > 0$ з нерівності $0 < \left|x - \frac{\pi}{6}\right| < \delta$ випливає $\left|\sin x - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$.

Приклад 6. Доведіть, що функція $f(x) = \frac{|x|}{x}$ не має границі в точці $x_0 = 0$.

Доведення. Припустимо, що границя даної функції в точці $x_0 = 0$ існує і дорівнює a . Покажемо, що для $\varepsilon = 1$ не можна підібрати таке $\delta > 0$, що з нерівності $0 < |x| < \delta$ буде випливати нерівність $\left|\frac{|x|}{x} - a\right| < 1$. Дійсно, якщо $0 < x < \delta$, то $\left|\frac{|x|}{x} - a\right| = |1 - a| < 1$ або $0 < a < 2$.

Для випадку $-\delta < x < 0$ маємо $\left|\frac{|x|}{x} - a\right| = |-1 - a| < 1$ або $-a < A < 0$. Оскільки значень a , що задовольняють кожну з отриманих умов, не існує, то ми прийшли до протиріччя.

Приклад 7. Доведіть, що функція $f(x) = \frac{1}{x}$ не має границі в точці $x_0 = 0$.



Приклад 8. За допомогою означення границі функції в точці доведіть, що

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - x) = 6.$$

Розв'язання. Нехай $\varepsilon > 0$. Маємо ланцюжок перетворень

$$|f(x) - a| = |x^2 - x - 6| = |(x - 3)(x + 2)|.$$

Можна розглянути функцію $y = x^2 - x$, на проміжку $x \in (2, 4), x \neq 3$. Тоді

$$|(x - 3)(x + 2)| \leq 6|x - 3|.$$

Якщо вимагати, щоб виконувалась нерівність $6|x - 3| < \varepsilon$, то при

$$0 < |x - 3| < \delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{6}\right)$$

виконуватиметься нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon$.

VI. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. На заводі виготовляють квадратні бетонні плити, сторона яких за технічними вимогами повинна дорівнювати $a_0 = 15$ см. Площа плити залежить від довжини її сторони за формулою $S(a) = a^2$. Через похибку обладнання фактична довжина сторони може відрізнятись від нормативної і дорівнювати a . Потрібно гарантувати, щоб похибка площі не перевищувала 4 см^2 . Знайдіть, якою має бути абсолютна похибка (у мм) виготовлення сторони бетонної плити.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

- За допомогою означення границі функції в точці за Коші доведіть, що:
 - $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 2) = 1$;
 - $\lim_{x \rightarrow -1} (2x + 1) = -1$;
 - $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 2) = 8$;
 - $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$.
- В означенні границі функції в точці замість «...існує $\delta > 0$...» було сказано «... існує $\delta \dots$ ». Покажіть, що при такому «означенні» будь-яке число може слугувати границею функції в точці x_0 .
- За допомогою означення границі функції в точці за Коші доведіть, що:
 - $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 2) = 10$;
 - $\lim_{x \rightarrow 2} (4 - 3x) = -2$;
 - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$;
 - $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -4$.
- Дано прямокутник зі сторонами $a = 20$ см і $b = 30$ см. Знайдіть похибку в обчисленні периметра цього прямокутника, якщо сторона a виміряна з похибкою $0,1$ см, а сторона b – з похибкою $0,5$ см.
- Під час вимірювання катетів a та b прямокутного трикутника були допущені похибки $0,2$ см і $0,3$ см відповідно. Знайдіть похибку при обчисленні площі трикутника, якщо $a = 10$ см та $b = 40$ см.

6. За допомогою означення границі функції за Коші, обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 6x + 9)$;

2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - 2 \operatorname{tg} x)$;

Рівень В

1. За допомогою означення границі функції в точці за Коші доведіть, що:

1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$;

2) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -4$;

3) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} = -5$;

4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = -2$.

2. За допомогою означення границі функції в точці за Коші доведіть, що:

1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$;

2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$;

3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$;

4) $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$.

3. В означенні границі функції в точці замість «...з нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$ випливає...» було сказано «...з нерівності $|x - x_0| < \delta$ випливає...». Навести приклад функції, яка має границю в точці x_0 , але не має границі в цій точці за даним «означенням».

4. В означенні границі функції в точці замість «...для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ » було сказано «...для будь-якого $\delta > 0$ існує $\varepsilon > 0$...». Покажіть, що при такому «означенні» кожне з чисел $a = 0$ і $a = 100$ є границею функції $f(x) = x$ в точці $x_0 = 0$.

5. Доведіть, використовуючи означення границі функції за Коші, що функція $f(x)$ не має границі функції в точці x_0 :

1) $f(x) = \frac{x - 2}{|x - 2|}$, $x_0 = 2$;

2) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x_0 = 0$;

3) $f(x) = \cos \frac{1}{x - \pi}$, $x_0 = \pi$;

4) $f(x) = \sin \frac{1}{x + 1}$, $x_0 = -1$.

6. Під час вимірювання швидкості автомобіля, що рухається рівномірно, була допущена похибка 0,5 км/год. Яка буде абсолютна похибка при обчисленні довжини шляху, пройденого автомобілем за 40 хв?

7. Потяг, що рухається рівномірно, за 1 год 45 хв пройшов на 1 км менше, ніж передбачено графіком руху. Яку похибку допустив машиніст при виборі швидкості?

8. За рецептом потрібно мати водний розчин оцту, у якому процентний вміст оцту має бути в межах від 15% до 20%. Скільки оцту потрібно взяти для розчинення у 10 л води?

9. За допомогою означення границі функції в точці за Коші доведіть, що:

1) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2$;

2) $\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{x} = 3$;

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = 2$;

4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

10. За допомогою означення границі функції в точці за Коші доведіть, що:

$\lim_{x \rightarrow a} (kx + b) = ka + b$.

11. За допомогою означення границі функції за Коші, знайдіть границю функції в точці:

1) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{5(x - 5)}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{4(x - 2)}$.

- 12.** За допомогою означення границі функції за Коші, знайдіть границю функції в точці:

1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 9};$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2};$

3) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + x - 2};$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}.$

Рівень С

- 1.** Доведіть, використовуючи означення границі функції за Коші, що функція $f(x)$ не має границі функції в точці x_0 :

1) $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$

2) $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 1, \\ -x, & x < 1, \end{cases} \quad x_0 = 1.$

- 2.** За допомогою означення границі функції за Коші, обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 5x + 4};$

2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{3x^2 - 5x - 12}.$

- 3.** За допомогою означення границі функції за Коші, знайдіть границю функції в точці:

1) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49};$

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1 + 3x} - 2}{\sqrt{x} - 1};$

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5 - x} - \sqrt{2x + 2}}{x^2 - 4x + 3};$

4) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x - 2} - \sqrt{4 - x}}.$

- 4.** Відомо, що площа S рівнобедреного прямокутного трикутника задовольняє нерівності $1,6 < S < 1,62$. З якою кількістю вірних цифр можна визначити катети трикутника?

- 5.** Доведіть, використовуючи означення границі функції за Коші, що функція Діріхле $\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ не має границі в жодній точці.

- 6.** Функція f визначена на $\mathbb{R}$ і $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. Використовуючи означення границі функції за Коші знайдіть границю $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{x}{3}\right).$

- 7. Творче завдання.** Напишіть програму, яка ілюструє означення границі в точці за Коші.

Рефлексія

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
-
-
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
-
-

- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
-
-
- 4) Найскладнішим для мене було
-
-
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
-
-
- 6) Найбільше мені сподобалося
-
-

Можливі теми проєктів

- 1.** Визначення допустимих похибок у виробництві.
- 2.** Вплив округлення чисел на результат обчислень.
- 3.** Порівняння складності доведення, що певне число є границею функції в точці використовуючи означення, за Коші і за Гейне .
- 4.** Типові помилки при знаходженні границь функції в точці, за Коші.
- 5.** Дослідження похибки в економічних моделях.





