

Границя та неперервність функції

Урок 5. Теорема про арифметичні дії з границями функцій у точці

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) дізнаєтесь означення дельта-околу точки x_0 ;
- 2) дізнаєтесь означення проколотого дельта-околу точки x_0 ;
- 3) вивчите теорему про границю суми;
- 4) вивчите теорему про границю добутку;
- 5) вивчите теорему про границю частки;
- 6) навчитесь використовувати набуті знання щодо розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Розв'яжіть нерівність $0 < |x - 2| < 3$.
2. Знайдіть границю $\lim_{x \rightarrow x_0} (kx + b)$, де k і b – деякі числа.
3. Чому дорівнює границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 7n^3}{n^3}$.
4. Відомо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$. Знайдіть границю $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n a_{n+1}$.
5. Послідовність a_n така, що існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + a_n)$. Чи можна стверджувати, що послідовність (a_n) є збіжною?

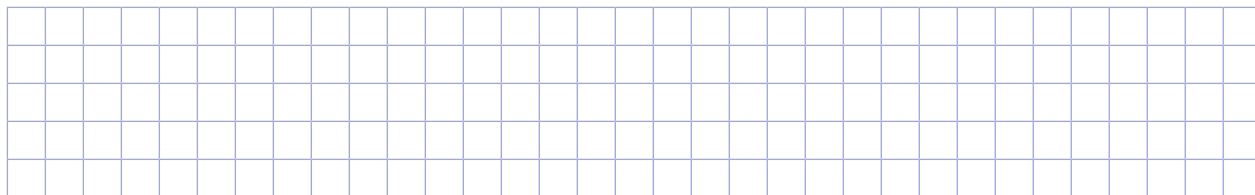
Доведення. Доведення проведемо, використовуючи означення границі функції в точці за Гейне.

Позначимо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$. Нехай x_n – довільна збіжна до x_0 послідовність значень аргументу функцій f і g , де $x_n \neq x_0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді відповідні послідовності $f(x_n)$ і $g(x_n)$ значень функцій є збіжними до чисел a і b відповідно. За теоремою про границю добутку збіжних числових послідовностей, послідовність $f(x_n) \cdot g(x_n)$ також є збіжною, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) \cdot g(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = a \cdot b$. Оскільки послідовність x_n було вибрано довільно, то це означає, що $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

Теорема про границю добутку є справедливою для будь-якої *скінченної* кількості множників (доведіть самостійно).

Наслідок. Якщо функція f має границю в точці x_0 і k – довільна стала, то функція $y = kf(x)$ також має границю в точці x_0 , причому $\lim_{x \rightarrow x_0} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Приклад 7. Обчисліть границю функції $f(x) = 3x^2 - x + 1$ в точці $x = 1$.



Приклад 8. Знайдіть $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$, де $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \neq \frac{1}{2}, \\ 3, & x = \frac{1}{2}. \end{cases}$

Розв'язання. Розглянемо функцію $g(x) = x^2 - 2x$. Оскільки в будь-якому проколотому δ -околі точки $x_0 = \frac{1}{2}$ функції f і g збігаються, то $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} g(x)$. Тому достатньо знайти $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (x^2 - 2x)$. Використовуючи теореми про арифметичні дії з границями функцій, запишемо:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (x^2 - 2x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} x^2 - \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} 2x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}.$$

Відповідь. $-\frac{3}{4}$.

VII. Границя частки

Нехай задано дві функції, які визначенні в одних і тих самих точках на деякому проколотому околі точки x_0 , тоді справедлива теорема про границю частки.

Теорема (границя частки). Якщо функції f і g мають границю в точці x_0 , причому границя функції g відмінна від нуля, то функція $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ також

має границю в точці x_0 , причому $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$.

Доведення. Доведення проведемо, використовуючи означення границі функції в точці за Гейне.

Позначимо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$. Нехай x_n — довільна збіжна до x_0 послідовність значень аргументу функцій f і g , де $x_n \neq x_0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді відповідні послідовності $f(x_n)$ і $g(x_n)$ значень функцій є збіжними до чисел a і b відповідно. За теоремою про границю частки збіжних числових послідовностей, послідовність $\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ також є збіж-

ною, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n)} = \frac{a}{b}$. Оскільки послідовність x_n було вибрано довіль-

но, то це означає, що $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$.

Теорема про границю добутку є справедливою для будь-якої *скінченної* кількості множників (доведіть самостійно).

Приклад 9. Знайдіть $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$.

Розв'язання. Оскільки $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 4 = 2^2 - 4 = 0$, то не можна застосувати теорему про границю частки до функції $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$. Перетворимо вираз

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}. \text{ Маємо: } \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-3}{x+2}.$$

Розглянемо функцію $g(x) = \frac{x-3}{x+2}$.

Оскільки $f(x) = g(x)$ при всіх $x \neq 2$, то $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$. Використовуючи теорему про арифметичні дії з границями функцій, отримуємо:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x+2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x-3)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x+2)} = \frac{2-3}{2+2} = -\frac{1}{4}.$$

Відповідь. $-\frac{1}{4}$.

VIII. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. На автоматизованій лінії контролю якості виготовляють металеві циліндричні деталі. Об'єм кожної деталі обчислюється за формулою $V(x) = \pi r^2(x)h(x)$, де $r(x)$ — радіус деталі (в см), $h(x)$ — висота деталі (в см), x — температура середовища під час виготовлення (у °C). Відомо, що при наближенні температури до значення $x_0 = 20^\circ\text{C}$ значення радіусу деталі наближається до 5 см, а значення висоти — до 12 см. Обчисліть, до якого значення наближається об'єм деталі.

IX. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Обчисліть границю функції:

- 1) $f(x) = 2x^2 - 3$ у точці $x = 5$; $x = 10$; $x = 50$;
- 2) $f(x) = (1+x)^2$ у точці $x = 0,5$; $x = 1$; $x = -0,5$.

2. Обчисліть:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 10} (12x - 30)$; 2) $\lim_{x \rightarrow 5} (8 - 3x)$; 3) $\lim_{x \rightarrow 5} (2x^2 - 0,5)$; 4) $\lim_{x \rightarrow 3} (4x^2 - 2)$.

3. Обчисліть границю:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$; 3) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$.

4. Знайдіть границі:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 3x + 5)$; 2) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{7x - 5}{10 + 2x}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 3x^2 + 2x + 2)$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$.

5. Обчисліть границі:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 5)$; 2) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 6x - 8)$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x + 3}{4x + 2}$; 4) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{7x - 14}{21x + 2}$.

6. Обчисліть границі:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 6x + 9)$; 2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - 2 \operatorname{tg} x)$.

Рівень В

1. Відомо, що $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 5$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 2$. Обчисліть:

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + 1}{g(x) - \varphi(x)}$; 2) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2f(x)}{g(x) \cdot \varphi(x)}$.

2. Доведіть, що границя многочлена $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ при $x \rightarrow x_0$ дорівнює значенню цього многочлена при $x = x_0$, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$.

3. Якщо $P(x)$ і $Q(x)$ – многочлени, причому $Q(x_0) \neq 0$, то границя дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}$ при $x \rightarrow x_0$ дорівнює його значенню при $x = x_0$, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$. Доведіть.

4. Обчисліть:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 10x}{2x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 15x^2}{5x^2}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 8x^2}{2x^2}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

5. Обчисліть:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 5x + 4}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{3x^2 - 5x - 12}.$$

6. Обчисліть:

$$1) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4\sqrt{x} + 4}{2 - \sqrt{x}}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 + x}.$$

7. Обчисліть границю:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right); \quad 2) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{x^2 - 2x} - \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right).$$

8. Знайдіть $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, де $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x, & x \neq 3, \\ 2, & x = 3 \end{cases}$

9. Обчисліть границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 9}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + x - 2}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}.$$

10. Нехай $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$. Знайдіть границю функції $y = (f(x) + 1)^2$ у точці $x_0 = 0$.

11. Обчисліть:

$$1) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{(x+2)(x-3)}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x^4 + x^2 - 12};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{8x^3 - 4x^2}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 2}{x^2 + 5x - 6}.$$

12. Обчисліть границю функції $f(x)$ у тій точці, в якій функція не визначена, якщо:

$$1) f(x) = \frac{4x^2 - 1}{2x - 1}; \quad 2) f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}.$$

Рівень С

1. Обчисліть:

$$1) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+3x} - 2}{\sqrt{x} - 1};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - \sqrt{2x+2}}{x^2 - 4x + 3}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}.$$

2. Відомо, що $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -1$. Обчисліть:

$$1) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - 2)(g(x) + 4); \quad 2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{2f(x)g(x) + 8}{f(x) + 4g(x)};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^2(x) - 9}{f(x) - 3}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g(x) + 1} + \frac{1}{g^2(x) + g(x)} \right).$$

3. Обчисліть:

1) $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x - 1}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - x^8}{x - 1}$.

4. Відомо, що $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 0$. Наведіть приклади таких функцій $f(x)$ і $g(x)$, щоб виконувалися умови:

1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)} = 2$; 2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

5. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$; 2) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x^2 + x}{(x-2)(x^2 + x + 1)} - \frac{2}{x-2} \right)$.

6. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5 + 2x + x^2}{x^3 + 3x^2 + 1}$; 2) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + x - 2}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 3x^2}{x^3 + 2x^2}$; 4) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 2x - 1}$.

7. Творче завдання. Доведіть теореми про арифметичні дії з границями в точці за означенням границі функції в точці за Коші.

Рефлексія

1. Я знаю означення дельта-околу точки x_0 .

Так Ще треба потренуватися Ні

2. Я знаю означення проколотого дельта-околу точки x_0 .

Так Ще треба потренуватися Ні

3. Я знаю теорему про границю суми.

Так Ще треба потренуватися Ні

4. Я знаю теорему про границю добутку.

Так Ще треба потренуватися Ні

5. Я знаю теорему про границю частки.

Так Ще треба потренуватися Ні

6. Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.

Так Ще треба потренуватися Ні

Можливі теми проєктів

1. Типові помилки при обчисленні границь за допомогою теорем про арифметичні дії з границями функцій в точці.

2. Використання арифметичних дій над границями у фізиці.

3. Границі в цифровій обробці сигналів.

4. Експериментальна перевірка правил дій над границями за допомогою таблиць і графіків.
5. Комп'ютерне моделювання арифметичних дій над границями.







