

11

Тема 1.

Границя та неперервність функції

Урок 5. Теорема про арифметичні дії з границями функцій у точці

Тип уроку: урок засвоєння нових знань.

План уроку

1. Означення дельта-околу точки x_0 .
2. Означення проколотої дельта-околу точки x_0 .
3. Границя суми.
4. Границя добутку.
5. Границя частки.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

виявляє ініціативу, пропонує та обґрунтовує ідеї щодо способу розв'язання специфічних проблемних ситуацій [12 МАО 2.2.1–1 П];

визначає компоненти математичної моделі специфічної проблемної ситуації, їх достатність і взаємозв'язки між ними [12 МАО 2.3.1–1 П];

аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1–1 П];

пов'язує різні математичні знання і вміння, узагальнює їх, робить висновки [12 МАО 4.1.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово впродовж викладення матеріалу.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.

- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.
- 6) Обов'язково пропонуйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.
- 7) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Робота над обраним проєктом може тривати впродовж вивчення (повторення) усієї змістової теми. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.
- 9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівні В або С.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Чи можна обчислити граничну потужність двигуна, якщо вона залежить від добутку двох величин, кожна з яких має свою границю?
- 2) Чи можна знайти границю складної формули, не користуючись безпосередньо означенням границі, а користуючись лише відомими границями її складових?
- 3) У яких ситуаціях можна знайти границю частки, якщо відомі границі чисельника і знаменника?
- 4) Чому знання границь окремих величин дозволяє передбачати поведінку складних формул?
- 5) Чи можливо визначити граничний тиск у трубі, якщо витрата рідини і діаметр труби змінюються, але мають свої границі?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Розв'яжіть нерівність $0 < |x - 2| < 3$.
Відповідь. $x \in (-1; 2) \cup (2; 5)$.
2. Знайдіть границю $\lim_{x \rightarrow x_0} (kx + b)$, де k і b – деякі числа.
Відповідь. $kx_0 + b$.

3. Чому дорівнює границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-7n^3}{n^3}$.

Відповідь. -7 .

4. Відомо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$. Знайдіть границю $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n a_{n+1}$.

Відповідь. 4 .

5. Послідовність a_n така, що існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + a_n)$. Чи можна стверджувати, що послідовність (a_n) є збіжною?

Відповідь. Ні, наприклад при $a_n = (-1)^n$.

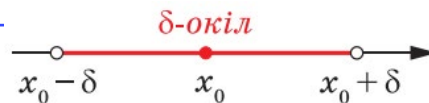
Як я вирішую певну проблему?

Задача. На автоматизованій лінії контролю якості виготовляють металеві циліндричні деталі. Об'єм кожної деталі обчислюється за формулою $V(x) = \pi r^2(x)h(x)$, де $r(x)$ — радіус деталі (в см), $h(x)$ — висота деталі (в см), x — температура середовища під час виготовлення (у $^{\circ}\text{C}$). Відомо, що при наближенні температури до значення $x_0 = 20^{\circ}\text{C}$ значення радіусу деталі наближається до 5 см, а значення висоти — до 12 см. Обчисліть, до якого значення наближається об'єм деталі.

III. Означення дельта-околу точки x_0 (1 хв)

Означення. Проміжок виду $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, де $\delta > 0$, називають **δ -околом точки x_0** .

δ -окіл точки x_0 можна також задати за допомогою подвійної нерівності $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ або за допомогою нерівності з модулем: $|x - x_0| < \delta$.



Ілюстративні приклади (3 хв)

6. Запишіть за допомогою нерівності з модулем δ -окіл точки 3,2, якщо $\delta = 0,1$.

Розв'язання. $|x - 3,2| < 0,1$.

Відповідь. $|x - 3,2| < 0,1$.

7. Запишіть за допомогою подвійної нерівності δ -окіл точки 2,2, якщо $\delta = 0,05$.

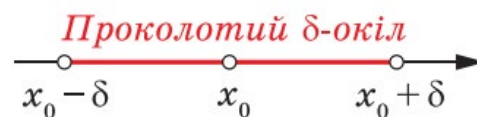
Розв'язання. $-0,05 < x - 2,2 < 0,05$, $2,15 < x < 2,25$.

Відповідь. $2,15 < x < 2,25$.

IV. Означення проколотого дельта-околу точки x_0 (1 хв)

Означення. Множину виду $(x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$, де, $\delta > 0$, називають **проколотим δ -околом точки x_0** .

Проколотий δ -окіл точки x_0 можна також задати за допомогою сукупності нерівностей $\begin{cases} x_0 - \delta < x < x_0, \\ x_0 < x < x_0 + \delta \end{cases}$ або за допомогою нерівності з модулем: $0 < |x - x_0| < \delta$.



Ілюстративні приклади (3 хв)

8. Запишіть за допомогою нерівності з модулем проколотий δ -окіл точки 3,2, якщо $\delta = 0,1$.

Розв'язання. $0 < |x - 3,2| < 0,1$.

Відповідь. $0 < |x - 3,2| < 0,1$.

9. Запишіть за допомогою об'єднання проміжків проколотий δ -окіл точки 2,2, якщо $\delta = 0,05$.

Розв'язання.

Відповідь. $x \in (2,15; 2,2) \cup (2,2; 2,25)$.

V. Границя суми (5 хв)

Нехай задано дві функції, які визначенні в одних і тих самих точках на деякому проколотому околі точки x_0 , тоді справедлива наступна теорема.

Теорема (границя суми). Якщо функції f і g мають границю в точці x_0 , то функція $y = f(x) + g(x)$ також має границю в точці x_0 , причому

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Доведення. Доведення проведемо, використовуючи означення границі функції в точці за Гейне.

Позначимо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$. Нехай x_n — довільна збіжна до x_0 послідовність значень аргументу функцій f і g , де $x_n \neq x_0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді відповідні послідовності $f(x_n)$ і $g(x_n)$ значень функцій є збіжними до чисел a і b відповідно. За теоремою про границю суми збіжних числових послідовностей, послідовність $f(x_n) + g(x_n)$ також є збіжною, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) + g(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = a + b$. Оскільки послідовність x_n було вибрано довільно, то це означає, що $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

Теорема про границю суми є справедливою для будь-якої скінченної кількості доданків (доведіть самостійно).

Ілюстративні приклади (5 хв)

10. Знайдіть помилку в міркуваннях $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x} + \sqrt{-x}) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{-x} = 0 + 0 = 0$.

Розв'язання. Розглянемо функції $f(x) = \sqrt{x}$ і $g(x) = \sqrt{-x}$. Кожна із цих функцій має границю в точці $x_0 = 0$. Проте функція $y = f(x) + g(x)$ визначена лише в точці $x_0 = 0$ і тому не має границі в цій точці.

Цей приклад показує важливість вимоги того, що функції f і g мають бути визначені в одних і тих самих точках деякого проколотої δ -околу точки x_0 .

- 11.** Відомо, що $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 3$. Обчисліть $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + \varphi(x) - g(x))$.

Розв'язання. За теоремою про границю суми:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + \varphi(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 1 + 2 - 3 = 0$$

Відповідь. 0.

VI. Границя добутку (3 хв)

Нехай задано дві функції, які визначені в одних і тих самих точках на деякому проколотому околі точки x_0 , тоді справедлива теорема про границю добутку.

Теорема (границя добутку). Якщо функції f і g мають границю в точці x_0 , то функція $y = f(x)g(x)$ також має границю в точці x_0 , причому

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Доведення. Доведення проведемо, використовуючи означення границі функції в точці за Гейне.

Позначимо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$. Нехай x_n – довільна збіжна до x_0 послідовність значень аргументу функцій f і g , де $x_n \neq x_0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді відповідні послідовності $f(x_n)$ і $g(x_n)$ значень функцій є збіжними до чисел a і b відповідно. За теоремою про границю добутку збіжних числових послідовностей, послідовність $f(x_n) \cdot g(x_n)$ також є збіжною, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) \cdot g(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = a \cdot b$. Оскільки послідовність x_n було вибрано довільно, то це означає, що $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

Теорема про границю добутку є справедливою для будь-якої скінченної кількості множників (доведіть самостійно).

Наслідок. Якщо функція f має границю в точці x_0 і k – довільна стала, то функція $y = kf(x)$ також має границю в точці x_0 , причому $\lim_{x \rightarrow x_0} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Ілюстративні приклади (5 хв)

- 12.** Обчисліть границю функції $f(x) = 3x^2 - x + 1$ в точці $x = 1$.

Розв'язання. За теоремами про границю суми, границю добутку та за наслідком із теореми про границю добутку маємо:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - x + 1) = 3 \lim_{x \rightarrow 1} x \cdot \lim_{x \rightarrow 1} x - \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 3 \cdot 1 \cdot 1 - 1 + 1 = 3.$$

Відповідь. 3.

13. Знайдіть $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$, де $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, x \neq \frac{1}{2}, \\ 3, x = \frac{1}{2}. \end{cases}$

Розв'язання. Розглянемо функцію $g(x) = x^2 - 2x$. Оскільки в будь-якому проколотому δ -околі точки $x_0 = \frac{1}{2}$ функції f і g збігаються, то $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} g(x)$. Тому достатньо знайти $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (x^2 - 2x)$. Використовуючи теореми про арифметичні дії з границями функцій, запишемо:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (x^2 - 2x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} x^2 - \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} 2x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}.$$

Відповідь. $-\frac{3}{4}$.

VII. Границя частки (3 хв)

Нехай задано дві функції, які визначенні в одних і тих самих точках на деякому проколотому околі точки x_0 , тоді справедлива теорема про границю частки.

Теорема (границя частки). Якщо функції f і g мають границю в точці x_0 , причому границя функції g відмінна від нуля, то функція $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ також має границю в точці x_0 , причому $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$.

Доведення. Доведення проведемо, використовуючи означення границі функції в точці за Гейне.

Позначимо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$. Нехай x_n — довільна збіжна до x_0 послідовність значень аргументу функцій f і g , де $x_n \neq x_0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді відповідні послідовності $f(x_n)$ і $g(x_n)$ значень функцій є збіжними до чисел a і b відповідно. За теоремою про границю частки збіжних числових послідовностей, послідовність $\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ також є збіж-

ною, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n)} = \frac{a}{b}$. Оскільки послідовність x_n було вибрано довіль-

но, то це означає, що $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$.

Теорема про границю добутку є справедливою для будь-якої скінченної кількості множників (доведіть самостійно).

Ілюстративні приклади (5 хв)

14. Знайдіть $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$.

Розв'язання. Оскільки $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 4 = 2^2 - 4 = 0$, то не можна застосувати

теорему про границю частки до функції $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$. Перетворимо вираз

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}. \text{ Маємо: } \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-3}{x+2}.$$

Розглянемо функцію $g(x) = \frac{x-3}{x+2}$.

Оскільки $f(x) = g(x)$ при всіх $x \neq 2$, то $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$. Використовуючи теорему про арифметичні дії з границями функцій, отримуємо:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x+2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x-3)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x+2)} = \frac{2-3}{2+2} = -\frac{1}{4}.$$

Відповідь. $-\frac{1}{4}$.

15. Відомо, що $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 5$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 2$. Обчисліть $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + \varphi(x)}{g(x) \cdot \varphi(x)}$.

Розв'язання. За теоремами про границю суми, добутку та частки маємо:

$$\frac{f(x) + \varphi(x)}{g(x) \cdot \varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + \varphi(x))}{\lim_{x \rightarrow a} (g(x) \cdot \varphi(x))} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)} = \frac{-1 + 5}{2 \cdot 5} = 0,4.$$

Відповідь. 0,4.

VIII. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. На автоматизованій лінії контролю якості виготовляють металеві циліндричні деталі. Об'єм кожної деталі обчислюється за формулою $V(x) = \pi r^2(x)h(x)$, де $r(x)$ — радіус деталі (в см), $h(x)$ — висота деталі (в см), x — температура середовища під час виготовлення (у °C). Відомо, що при наближенні температури до значення $x_0 = 20^\circ\text{C}$ значення радіусу деталі наближається до 5 см, а значення висоти — до 12 см. Обчисліть, до якого значення наближається об'єм деталі.

Розв'язання. Обчислимо $\lim_{x \rightarrow 20} V(x) = \lim_{x \rightarrow 20} \pi r^2(x)h(x)$.

Скористаємось теоремою про границю добутку:

$$\lim_{x \rightarrow 20} V(x) = \lim_{x \rightarrow 20} \pi r^2(x)h(x) = \pi \cdot \lim_{x \rightarrow 20} r(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 20} r(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 20} h(x) = \pi \cdot 5 \cdot 5 \cdot 12 = 300\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

Відповідь. $300\pi \text{ см}^3$.

ІХ. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (5–10 хв)

Рівень А

1. Обчисліть границю функції:

1) $f(x) = 2x^2 - 3$ у точці $x = 5$; $x = 10$; $x = 50$;

2) $f(x) = (1+x)^2$ у точці $x = 0,5$; $x = 1$; $x = -0,5$.

2. Обчисліть:

1) $\lim_{x \rightarrow 10} (12x - 30)$; 2) $\lim_{x \rightarrow 5} (8 - 3x)$; 3) $\lim_{x \rightarrow 5} (2x^2 - 0,5)$; 4) $\lim_{x \rightarrow 3} (4x^2 - 2)$.

3. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$; 3) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$.

4. Знайдіть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 3x + 5)$; 2) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{7x - 5}{10 + 2x}$;
3) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 3x^2 + 2x + 2)$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$.

5. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 5)$; 2) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 6x - 8)$;
3) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x + 3}{4x + 2}$; 4) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{7x - 14}{21x + 2}$.

6. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 6x + 9)$; 2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - 2 \operatorname{tg} x)$.

Рівень В

1. Відомо, що $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 5$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 2$. Обчисліть:

1) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + 1}{g(x) - \varphi(x)}$; 2) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2f(x)}{g(x) \cdot \varphi(x)}$.

2. Доведіть, що границя многочлена $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ при $x \rightarrow x_0$ дорівнює значенню цього многочлена при $x = x_0$, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$.

3. Якщо $P(x)$ і $Q(x)$ – многочлени, причому $Q(x_0) \neq 0$, то границя дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}$ при

$x \rightarrow x_0$ дорівнює його значенню при $x = x_0$, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$. Доведіть.

4. Обчисліть:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 10x}{2x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 15x^2}{5x^2}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 8x^2}{2x^2}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

5. Обчисліть:

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 5x + 4}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{3x^2 - 5x - 12}$.

6. Обчисліть:

1) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4\sqrt{x}+4}{2-\sqrt{x}}$; 4) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+x}$.

7. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$; 2) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{x^2-2x} - \frac{1}{x^2-3x+2} \right)$.

8. Знайдіть $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, де $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x, & x \neq 3, \\ 2, & x = 3 \end{cases}$

9. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+2x-15}{x^2-9}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3-2x^2}{x^2}$; 3) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+8}{x^2+x-2}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$.

10. Нехай $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$. Знайдіть границю функції $y = (f(x)+1)^2$ у точці $x_0 = 0$.

11. Обчисліть:

1) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+4x^2+4x}{(x+2)(x-3)}$; 2) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2-3}{x^4+x^2-12}$; 3) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2-5x+2}{8x^3-4x^2}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-5x^2+2x+2}{x^2+5x-6}$.

12. Обчисліть границю функції $f(x)$ у тій точці, в якій функція не визначена, якщо:

1) $f(x) = \frac{4x^2-1}{2x-1}$; 2) $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x-1}$.

Рівень С

1. Обчисліть:

1) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+3x}-2}{\sqrt{x}-1}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x}-\sqrt{2x+2}}{x^2-4x+3}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$.

2. Відомо, що $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -1$. Обчисліть:

1) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)-2)(g(x)+4)$; 2) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2f(x)g(x)+8}{f(x)+4g(x)}$; 3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f^2(x)-9}{f(x)-3}$; 4) $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g(x)+1} + \frac{1}{g^2(x)+g(x)} \right)$.

3. Обчисліть:

1) $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x-1}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-x^8}{x-1}$.

4. Відомо, що $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 0$. Наведіть приклади таких функцій $f(x)$ і $g(x)$, щоб виконувалися умови:

1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)} = 2$; 2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

5. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right);$

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x^2 + x}{(x-2)(x^2 + x + 1)} - \frac{2}{x-2} \right).$

6. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5 + 2x + x^2}{x^3 + 3x^2 + 1};$ 2) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + x - 2};$ 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 3x^2}{x^3 + 2x^2};$ 4) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 2x - 1}.$

7. **Творче завдання.** Доведіть теореми про арифметичні дії з границями в точці за означенням границі функції в точці за Коші.

Х. Рефлексія (2 хв)

1. Я знаю означення дельта-околу точки x_0 .

Так

Ще треба потренуватися

Ні

2. Я знаю означення проколотого дельта-околу точки x_0 .

Так

Ще треба потренуватися

Ні

3. Я знаю теорему про границю суми.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

4. Я знаю теорему про границю добутку.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

5. Я знаю теорему про границю частки.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

6. Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

Можливі теми проєктів

1. Типові помилки при обчисленні границь за допомогою теорем про арифметичні дії з границями функцій в точці.

2. Використання арифметичних дій над границями у фізиці.

3. Границі в цифровій обробці сигналів.

4. Експериментальна перевірка правил дій над границями за допомогою таблиць і графіків.

5. Комп'ютерне моделювання арифметичних дій над границями.