

**Урок 6. Урок–практикум. Обчислення границь
функцій в точках****РОБОЧИЙ АРКУШ**

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) удосконалили вміння обчислювати границі функцій в точках за теоремами про арифметичні дії з границями функцій;
- 2) вивчили додаткові властивості границь функцій в точці та навчилися доводити, що певне число є границею функції в точці;
- 3) навчилися використовувати набуті знання щодо розв'язування практичних задач.:

II. Повторення

1. Запишіть у вигляді $|x - x_0| < \delta$ подвійну нерівність $-5 < x < 1$.
2. Знайдіть границю, послідовності $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(2-n)(n-1)}{5n^4 + 2}$.
3. Чому дорівнює границя $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{x - 2}$.
4. Відомо, що $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{2}{3}$. Обчисліть $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)}$.
5. Для даної збіжної послідовності $a_n = \frac{n}{n+1}$ знайдіть таку нескінченно малу послідовність β_n , що $a_n = a + \beta_n$, де a — границя послідовності a_n .

III. Обчислення границь функцій в точках за теоремами про арифметичні дії з границями функцій

При обчисленні границь дробово-раціональних функцій іноді виникає ситуація, коли теоремою про границю частки використати не можна через те що границя функції, яка знаходиться в знаменнику дорівнює нулю. Якщо ж границя функції в чисельнику дробу теж дорівнює нулю, то маємо так звану невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$. У цих випадках як правило можна «позбутися» множника, що перетворює чисельник і знаменник у нуль, якщо розкласти чисельник і знаменник на множники і скоротити відповідний множник.

Якщо раніше ми оформляли такі завдання так:

Розглянемо обчислення границі $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x}$ з використанням теорем про арифметичні дії з границями функцій.

Оскільки $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 3x) = \lim_{x \rightarrow 3} x^2 - \lim_{x \rightarrow 3} 3x = 3^2 - 9 = 0$, то не можна застосувати теорему про границю частки до функції $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x}$. Перетворимо вираз $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x}$. Маємо:

$$\text{мо: } \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x} = \frac{(x-1)(x-3)}{x(x-3)} = \frac{x-1}{x}.$$

Розглянемо функцію $g(x) = \frac{x-1}{x}$. Оскільки $f(x) = g(x)$ при всіх $x \neq 3$, то $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} g(x)$. Використовуючи теореми про арифметичні дії з границями функцій, отримуємо:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x-1)}{\lim_{x \rightarrow 3} x} = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Однак повне пояснення розв'язку займає багато часу, тому запропонуємо більш коротше оформлення:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-1)}{x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x-1)}{\lim_{x \rightarrow 3} x} = \frac{2}{3}.$$

Якщо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$ зустрічається у виразах, що містять квадратні корені, то доцільно спробувати домножити на вирази спряжені до тих які перетворюють чисельник і знаменник на 0.

Наприклад,
$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{2x+1}+3)} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2x+1-9)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{2x+1}+3} = \frac{2 \cdot (2+2)}{3+3} = \frac{4}{3}.$$

Приклад 1. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 25}$.

Розв'язання.
$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 25} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-1)(x-5)}{(x+5)(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-1}{x+5} = \frac{5-1}{5+5} = 0,4.$$

Відповідь. 0,4.

5) Якщо функції f , g і h такі, що $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, причому існують границі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$, то функція g також має границю в точці x_0 , причому $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$.

Доведення цих властивостей наведемо в ілюстративних прикладах.

Приклад 6. Якщо функція $f(x)$ — визначена і обмежена в деякому околі точки x_0 , а функція $\beta(x)$ — нескінченно мала в точці x_0 , то функція $y = f(x) \cdot \beta(x)$ є нескінченно малою в точці x_0 .

Доведення. Нехай x_n — довільна збіжна до x_0 послідовність значень аргументу функцій f і β , де $x \neq x_0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, тоді відповідна послідовність $f(x_n)$ є обмеженою, а послідовність $\beta(x_n)$ — є нескінченно малою.

Якщо добуток обмеженої і нескінченно малої послідовності є нескінченно малою послідовністю, то $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \cdot \beta(x_n) = 0$.

Оскільки послідовність x_n було обрано довільно, то це означає, що $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \beta(x) = 0$, що й треба було довести.

Приклад 7. Якщо про функцію f відомо, що $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ і $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$, то $a = b$.

Доведення. Нехай x_n — довільна збіжна до x_0 послідовність значень аргументу функції f , де $x \neq x_0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, тоді відповідна послідовність $f(x_n)$ є збіжною до чисел a і b одночасно. Оскільки збіжна послідовність не може мати більше ніж одну границю, то $a = b$, що й треба було довести.

Приклад 8. Число a є границею функції f у точці x_0 тоді й тільки тоді, коли функцію f можна подати у вигляді $f(x) = a + \beta(x)$, де $\beta(x)$ — нескінченно мала функція в точці x_0 .

Доведення. Нехай x_n — довільна збіжна до x_0 послідовність значень аргументу функцій f і β , де $x \neq x_0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, тоді відповідна послідовність $f(x_n)$ є збіжною до числа a , а послідовність $\beta(x_n)$ — є нескінченно малою.

Скористаємось властивістю числових послідовностей:

число a є границею послідовності $f(x_n)$ тоді і тільки тоді, коли загальний член цієї послідовності можна подати у вигляді $f(x_n) = a + \beta(x_n)$, де $\beta(x_n)$ — нескінченно мала послідовність.

Оскільки послідовність x_n було обрано довільно, то це означає, твердження задачі є вірним.

Приклад 9. Якщо функції f і g такі, що $f(x) \leq g(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, причому існують границі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, то $a \leq b$.

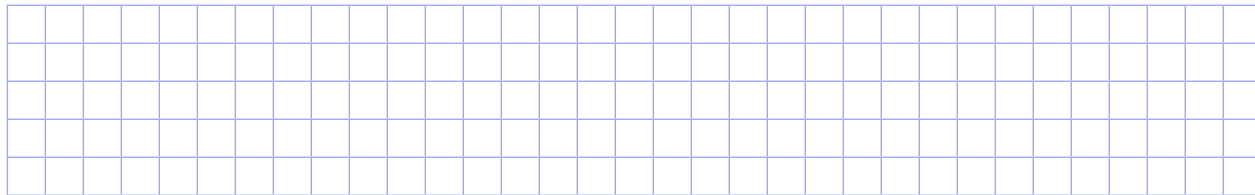
Доведення. Нехай x_n — довільна збіжна до x_0 послідовність значень аргументу функцій f і g , де $x \neq x_0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, тоді відповідна послідовність $f(x_n)$ є збіжною до числа a , а послідовність $g(x_n)$ — збіжною до числа b .

Скористаємось властивістю числових послідовностей:

якщо для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $f(x_n) \leq g(x_n)$, причому існують границі $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = b$, то $a \leq b$.

Оскільки послідовність x_n було обрано довільно, то це означає, твердження задачі є вірним.

Приклад 10. Якщо функції f , g і h такі, що $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, причому існують границі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$, то функція g також має границю в точці x_0 , причому $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$.



Приклад 11. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow \pi} \sin x \operatorname{arctg} \frac{x}{x - \pi}$.

Розв'язання. Оскільки $\lim_{x \rightarrow \pi} \sin x = \sin \pi = 0$, а $\left| \operatorname{arctg} \frac{x}{x - \pi} \right| < \frac{\pi}{2}$, то функція

$y = \sin x \operatorname{arctg} \frac{x}{x - \pi}$ є добутком обмеженої і нескінченно малої.

Тому $\lim_{x \rightarrow \pi} \sin x \operatorname{arctg} \frac{x}{x - \pi} = 0$.

Відповідь. 0.

V. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Під час випробування системи охолодження електродвигуна температура обмотки $T(t)$ (у $^{\circ}\text{C}$) залежить від часу роботи двигуна t (у хвиликах) і ця залежність визначається функцією $T(t) = \frac{t^2 - 9}{t - 3} + 40$. У момент часу $t = 3$ у системі перемикався електронний контролер і датчик не зміг зафіксувати температуру. Скориставшись теоремами про границі функції в точці установіть до якого значення наближається температура в момент часу $t = 3$.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Обчисліть границю функції:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cos \frac{1}{x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \sin(x - 1) \cos\left(\frac{\pi}{x - 1}\right)$.

2. Обчисліть:

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 1}{3x - 1}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$.

3. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$;

2) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3 + 64}{x + 4}$.

4. Знайдіть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}$;

3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-x}{x-2}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x+7}-4}$;

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{4+x}-2}$.

5. Доведіть, що:

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 0$;

2) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{x} = \frac{1}{6}$.

6. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-2}$.

Рівень В

1. Обчисліть границю функції:

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \sin 2\pi x \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} x \cos \frac{1}{x}$.

2. Наведіть приклад функції $f(x)$ з областю визначення $D(f) = \mathbb{R}$, яка не має границі в жодній точці, але щоб функція $f^2(x)$ мала границю в кожній точці.

3. Що можна стверджувати про існування границі функцій $f+g$ та $f \cdot g$ в точці x_0 , якщо:

1) функції f та g мають границю в точці x_0 ;

2) функції f та g не мають границі в точці x_0 ;

3) функція f має границю в точці x_0 , а функція g – ні?

4. Обчисліть:

1) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2+7x+3}{4x^2+7x-15}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-27}{11x^2-32x-3}$.

5. Обчисліть:

1) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-6}-\sqrt{8-x}}{x-7}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{4-x}-\sqrt{x}}$.

6. Обчисліть $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3} \right)$.

7. Доведіть, що:

1) $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 = 16$;

2) $\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 6x + 8) = 8$;

3) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{24}$;

4) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2$.

8. Якщо функція f має границю при $x \rightarrow x_0$, то існує проколотий окіл точки x_0 , у якому ця функція є обмеженою. Доведіть.

9. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4-4x^3+1}{(x-1)^2}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x^2+x}{(x-2)(x^2+x+1)} - \frac{2}{x-2} \right)$.

10. Обчисліть границю

1) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$;

11. Обчисліть $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$.
12. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[k]{x} - 1}$, де $n, k \in \mathbb{N}$.

Рівень С

1. Обчисліть границю функції, де $\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ функція Діріхле:
- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} x\mathcal{D}(x)$; 2) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} (x - \sqrt{2})\mathcal{D}(x)$.
2. Обчисліть $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 36} - 6}$.
3. Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, причому $a \neq 0$, то знайдеться проколотий окіл точки x_0 , на якому знак функції збігається зі знаком числа a . Доведіть.
4. Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ і існує проколотий окіл точки x_0 , на якому $f(x) \geq 0$, то $a \geq 0$. Доведіть.
5. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{101} - 101x + 100}{x^2 - 2x + 1}$.
6. Обчисліть границю:
- 1) $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt[3]{9+x} + x + 7}{\sqrt[3]{15+2x} + 1}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{2x^2 + 10x + 1} - \sqrt[7]{x^2 + 10x + 1}}{x}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+4x} - \sqrt[4]{1+3x}}{1 - \sqrt[5]{1-5x}}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - \sqrt[k]{1+bx}}{x}$, де $n, k \in \mathbb{N}$.
7. **Творче завдання.** Виконайте аналітичне та графічне дослідження поведінки функції $y = \frac{x^2 - 9}{x - 3} + \frac{6}{x + 3}$ в точці $x = 3$.

Рефлексія

Оцініть розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Жахливі									Чудові

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

- 1)
- 2)

?

.....

.....

Можливі теми проєктів

1. Що означає невизначеність виду $\frac{0}{0}$ і як її застосовують у математиці та у фізиці.
2. Застосування границь у вимірювальних приладах і цифровій фільтрації.
3. Обчислення границь у задачах на швидкість, прискорення та зміну температури.
4. Аналіз похибок вимірювань через наближення до граничних значень.
5. Аналіз границь функцій в точках за допомогою комп'ютерних програм.

