

# 11

## Тема 1.

# Границя та неперервність функції

## Урок 6. Урок–практикум. Обчислення границь функцій в точках

**Тип уроку:** урок удосконалення навичок і вмінь.

### План уроку

1. Обчислення границь функцій в точках, за теоремами про арифметичні дії з границями функцій.
2. Доведення твердження, що певне число є границею функції в точці.

### Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

досліджує специфічну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела [12 МАО 1.2.1–1 П];

визначає, яких даних недостатньо чи є надлишкові дані, під час розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2–1 П];

визначає та усуває прогалини у власних математичних знаннях і вміннях у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 4.1.3–1 П].

### Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово впродовж викладення матеріалу.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.

6) Обов'язково пропонуйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Робота над обраним проєктом може тривати впродовж вивчення (повторення) усієї змістової теми. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівні В або С.

## I. Організаційна частина (2 хв)

### Мотиваційні запитання

1) Чи можна обчислити температуру двигуна, якщо в момент коли відбувається різкий перехід режиму його роботи, але відома функція залежності температури від часу?

2) Чому в комп'ютерних розрахунках замість точних значень часто використовують дуже близькі наближення?

3) Що робити, якщо при підстановці в формулу отримуємо вираз виду  $\frac{0}{0}$ ? Чи означає це, що значення не існує?

4) Навіщо в фізиці та техніці розглядають процеси в нескінченно малих околах часу?

5) Чому іноді важливіше знати не саме значення, а тенденцію його зміни?

## II. Повторення (3–4 хв)

1. Запишіть у вигляді  $|x - x_0| < \delta$  подвійну нерівність  $-5 < x < 1$ .

Відповідь.  $|x + 2| < 3$ .

2. Знайдіть границю, послідовності  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(2-n)(n-1)}{5n^4 + 2}$ .

Відповідь.  $-\frac{1}{5}$ .

3. Чому дорівнює границя  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{x - 2}$ .

Відповідь.  $-0,5$ .

4. Відомо, що  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{2}{3}$ . Обчисліть  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)}$ .

Відповідь.  $-3$ .

5. Для даної збіжної послідовності  $a_n = \frac{n}{n+1}$  знайдіть таку нескінченно малу послідовність  $\beta_n$ , що  $a_n = a + \beta_n$ , де  $a$  — границя послідовності  $a_n$ .

Відповідь.  $a_n = 1 + \left(-\frac{1}{n+1}\right)$ ,  $\beta_n = \frac{-1}{n+1}$ .

### Як я вирішую певну проблему?

**Задача.** Під час випробування системи охолодження електродвигуна температура обмотки  $T(t)$  (у  $^{\circ}\text{C}$ ) залежить від часу роботи двигуна  $t$  (у хвиликах) і ця залежність визначається функцією  $T(t) = \frac{t^2 - 9}{t - 3} + 40$ . У момент часу  $t = 3$  у системі перемикався електронний контролер і датчик не зміг зафіксувати температуру. Скориставшись теоремами про границі функцій в точці установіть до якого значення наближається температура в момент часу  $t = 3$ .

## III. Обчислення границь функцій в точках за теоремами про арифметичні дії з границями функцій (5 хв)

При обчисленні границь дробово-раціональних функцій іноді виникає ситуація, коли теоремою про границю частки використати не можна через те що границя функції, яка знаходиться в знаменнику дорівнює нулю. Якщо ж границя функції в чисельнику дробу теж дорівнює нулю, то маємо так звану невизначеність  $\left[\frac{0}{0}\right]$ . У цих випадках як правило можна «позбутися» множника, що перетворює чисельник і знаменник у нуль, якщо розкласти чисельник і знаменник на множники і скоротити відповідний множник.

Якщо раніше ми оформляли такі завдання так:

Розглянемо обчислення границі  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x}$  з використанням теорем про арифметичні дії з границями функцій.

Оскільки  $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 3x) = \lim_{x \rightarrow 3} x^2 - \lim_{x \rightarrow 3} 3x = 3^2 - 9 = 0$ , то не можна застосувати теорему про границю частки до функції  $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x}$ . Перетворимо вираз  $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x}$ . Маємо:

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x} = \frac{(x-1)(x-3)}{x(x-3)} = \frac{x-1}{x}.$$

Розглянемо функцію  $g(x) = \frac{x-1}{x}$ . Оскільки  $f(x) = g(x)$  при всіх  $x \neq 3$ , то  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ . Використовуючи теореми про арифметичні дії з границями функцій, отримуємо:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x-1)}{\lim_{x \rightarrow 3} x} = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Однак повне пояснення розв'язку займає багато часу, тому запропонуємо більш коротше оформлення:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-1)}{x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x-1)}{\lim_{x \rightarrow 3} x} = \frac{2}{3}.$$

Якщо невизначеність  $\left[ \frac{0}{0} \right]$  зустрічається у виразах, що містять квадратні корені, то

доцільно спробувати домножити на вирази спряжені до тих які перетворюють чисельник і знаменник на 0.

$$\begin{aligned} \text{Наприклад, } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{2x+1}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2x+1-9)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{2x+1}+3} = \frac{2 \cdot (2+2)}{3+3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

### Ілюстративні приклади (7–10 хв)

**6.** Обчисліть границю  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 25}$ .

*Розв'язання.*  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 25} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-1)(x-5)}{(x+5)(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-1}{x+5} = \frac{5-1}{5+5} = 0,4.$

*Відповідь.* 0,4.

**7.** Обчисліть границю  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$ , де  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

*Розв'язання.*  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x^2 + x + 1)}{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x^2 + x + 1}{x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1} = \frac{m}{n}.$$

*Відповідь.*  $\frac{m}{n}$ .

**8.** Обчисліть границю  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$ .

*Розв'язання.*  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}(x\sqrt{x} - 1)}{1 - \sqrt{x}} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{1 - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}(x+\sqrt{x}+1)}{-1} = -3.$$

*Відповідь.* -3.

**9.** Обчисліть границю  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - (x+1)}{\sqrt{x+1} - 1}$ .

*Розв'язання.*  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - (x+1)}{\sqrt{x+1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}(1 - \sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sqrt{x+1}) = -1.$

*Відповідь.* -3.

**10.** Обчисліть границю  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}$ .

*Розв'язання.*

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})}{(\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x})(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})}{(4+x) - (4-x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})}{2} = \frac{7(2+2)}{2} = 14.\end{aligned}$$

*Відповідь.* 14.

#### IV. Доведення того, що певне число є границею функції в точці (5 хв)

**Означення 1.** Функція  $\beta(x)$  називається нескінченно малою в точці  $x_0$ , якщо  $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$ .

**Означення 2.** Функція  $f(x)$  називається обмеженою на множині  $I$ , якщо існує таке число  $M$ , що для всіх  $x \in I$  виконується нерівність  $|f(x)| \leq M$ .

Сформулюємо декілька властивостей границь функцій в точці.

- 1) Якщо функція  $f(x)$  — визначена і обмежена в деякому околі точки  $x_0$ , а функція  $\beta(x)$  — нескінченно мала в точці  $x_0$ , то функція  $y = f(x) \cdot \beta(x)$  є нескінченно малою в точці  $x_0$ .
- 2) Якщо про функцію  $f$  відомо, що  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  і  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ , то  $a = b$ .

**Примітка.** Функція не може мати в точці дві різні границі.

3) Число  $a$  є границею функції  $f$  у точці  $x_0$  тоді й тільки тоді, коли функцію  $f$  можна подати у вигляді  $f(x) = a + \beta(x)$ , де  $\beta(x)$  — нескінченно мала функція в точці  $x_0$ .

4) Якщо функції  $f$  і  $g$  такі, що  $f(x) \leq g(x)$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$ , причому існують границі  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ , то  $a \leq b$ .

5) Якщо функції  $f$ ,  $g$  і  $h$  такі, що  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$ , причому існують границі  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$ , то функція  $g$  також має границю в точці  $x_0$ , причому  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$ .

Доведення цих властивостей наведемо в ілюстративних прикладах.

#### Ілюстративні приклади (5–7 хв)

**11.** Якщо функція  $f(x)$  — визначена і обмежена в деякому околі точки  $x_0$ , а функція  $\beta(x)$  — нескінченно мала в точці  $x_0$ , то функція  $y = f(x) \cdot \beta(x)$  є нескінченно малою в точці  $x_0$ .

*Доведення.* Нехай  $x_n$  — довільна збіжна до  $x_0$  послідовність значень аргументу функцій  $f$  і  $\beta$ , де  $x \neq x_0$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ , тоді відповідна послідовність  $f(x_n)$  є обмеженою, а послідовність  $\beta(x_n)$  — нескінченно малою.

Якщо добуток обмеженої і нескінченно малої послідовності є нескінченно малою послідовністю, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \cdot \beta(x_n) = 0$ .

Оскільки послідовність  $x_n$  було обрано довільно, то це означає, що  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \beta(x) = 0$ , що й треба було довести.

- 12.** Якщо про функцію  $f$  відомо, що  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  і  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ , то  $a = b$ .

*Доведення.* Нехай  $x_n$  — довільна збіжна до  $x_0$  послідовність значень аргументу функції  $f$ , де  $x \neq x_0$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ , тоді відповідна послідовність  $f(x_n)$  є збіжною до чисел  $a$  і  $b$  одночасно. Оскільки збіжна послідовність не може мати більше ніж одну границю, то  $a = b$ , що й треба було довести.

- 13.** Число  $a$  є границею функції  $f$  у точці  $x_0$  тоді і тільки тоді, коли функцію  $f$  можна подати у вигляді  $f(x) = a + \beta(x)$ , де  $\beta(x)$  — нескінченно мала функція в точці  $x_0$ .

*Доведення.* Нехай  $x_n$  — довільна збіжна до  $x_0$  послідовність значень аргументу функцій  $f$  і  $\beta$ , де  $x \neq x_0$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ , тоді відповідна послідовність  $f(x_n)$  є збіжною до числа  $a$ , а послідовність  $\beta(x_n)$  — є нескінченно малою.

Скористаємось властивістю числових послідовностей:

число  $a$  є границею послідовності  $f(x_n)$  тоді і тільки тоді, коли загальний член цієї послідовності можна подати у вигляді  $f(x_n) = a + \beta(x_n)$ , де  $\beta(x_n)$  — нескінченно мала послідовність.

Оскільки послідовність  $x_n$  було обрано довільно, то це означає, твердження задачі є вірним.

- 14.** Якщо функції  $f$  і  $g$  такі, що  $f(x) \leq g(x)$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$ , причому існують границі  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ , то  $a \leq b$ .

*Доведення.* Нехай  $x_n$  — довільна збіжна до  $x_0$  послідовність значень аргументу функцій  $f$  і  $g$ , де  $x \neq x_0$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ , тоді відповідна послідовність  $f(x_n)$  є збіжною до числа  $a$ , а послідовність  $g(x_n)$  — збіжною до числа  $b$ .

Скористаємось властивістю числових послідовностей:

якщо для всіх  $n \in \mathbb{N}$  виконується нерівність  $f(x_n) \leq g(x_n)$ , причому існують границі  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = b$ , то  $a \leq b$ .

Оскільки послідовність  $x_n$  було обрано довільно, то це означає, твердження задачі є вірним.

- 15.** Якщо функції  $f$ ,  $g$  і  $h$  такі, що  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$ , причому існують границі  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$ , то функція  $g$  також має границю в точці  $x_0$ , причому  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$ .

*Доведення.* Нехай  $x_n$  — довільна збіжна до  $x_0$  послідовність значень аргументу функцій  $f$ ,  $g$  і  $h$ , де  $x \neq x_0$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ , тоді відповідні послідовності  $f(x_n)$  та  $h(x_n)$  є збіжними до числа  $a$ , причому  $f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n)$ . За теоремою про двох конвоїрів  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = a$ .

Оскільки послідовність  $x_n$  було обрано довільно, то це означає, що  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$ .

**16.** Обчисліть границю  $\lim_{x \rightarrow \pi} \sin x \operatorname{arctg} \frac{x}{x - \pi}$ .

*Розв'язання.* Оскільки  $\lim_{x \rightarrow \pi} \sin x = \sin \pi = 0$ , а  $\left| \operatorname{arctg} \frac{x}{x - \pi} \right| < \frac{\pi}{2}$ , то функція

$y = \sin x \operatorname{arctg} \frac{x}{x - \pi}$  є добутком обмеженої і нескінченно малої.

Тому  $\lim_{x \rightarrow \pi} \sin x \operatorname{arctg} \frac{x}{x - \pi} = 0$ .

*Відповідь.* 0.

## V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5 хв)

### Як я вирішую певну проблему?

**Задача.** Під час випробування системи охолодження електродвигуна температура обмотки  $T(t)$  (у °C) залежить від часу роботи двигуна  $t$  (у хвилинали) і ця залежність визначається функцією  $T(t) = \frac{t^2 - 9}{t - 3} + 40$ . У момент часу  $t = 3$  у системі перемикався електронний контролер і датчик не зміг зафіксувати температуру. Скориставшись теоремами про границі функції в точці установіть до якого значення наближається температура в момент часу  $t = 3$ .

*Розв'язання.* Обчислимо:

$$\lim_{t \rightarrow 3} T(t) = \lim_{t \rightarrow 3} \left( \frac{t^2 - 9}{t - 3} + 40 \right) = \lim_{t \rightarrow 3} \left( \frac{(t - 3)(t + 3)}{t - 3} + 40 \right) = \lim_{t \rightarrow 3} (t + 43) = 3 + 43 = 46.$$

*Відповідь.* 46°C.

## VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (5–10 хв)

### Рівень А

**1.** Обчисліть границю функції:

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cos \frac{1}{x}$ ;

2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \sin(x - 1) \cos \left( \frac{\pi}{x - 1} \right)$ .

**2.** Обчисліть:

1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 1}{3x - 1}$ ;

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$ .

**3.** Обчисліть границю:

1)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ ;

2)  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3 + 64}{x + 4}$ .

**4.** Знайдіть границі:

1)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x + 5} - 3}$ ;

2)  $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x + 7} - 4}$ ;

3)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 2} - x}{x - 2}$ ;

4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{4 + x} - 2}$ .

**5.** Доведіть, що:

1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 0$ ;

2)  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{x} = \frac{1}{6}$ .

**6.** Обчисліть границі:

1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$ ;

2)  $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ .

### Рівень В

**1.** Обчисліть границю функції:

1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \sin 2\pi x \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1}$ ;

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} x \cos \frac{1}{x}$ .

**2.** Наведіть приклад функції  $f(x)$  з областю визначення  $D(f) = \mathbb{R}$ , яка не має границі в жодній точці, але щоб функція  $f^2(x)$  мала границю в кожній точці.

**3.** Що можна стверджувати про існування границі функцій  $f + g$  та  $f \cdot g$  в точці  $x_0$ , якщо:

1) функції  $f$  та  $g$  мають границю в точці  $x_0$ ;

2) функції  $f$  та  $g$  не мають границі в точці  $x_0$ ;

3) функція  $f$  має границю в точці  $x_0$ , а функція  $g$  – ні?

**4.** Обчисліть:

1)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 7x + 3}{4x^2 + 7x - 15}$ ;

2)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{11x^2 - 32x - 3}$ .

**5.** Обчисліть:

1)  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-6} - \sqrt{8-x}}{x-7}$ ;

2)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{4-x} - \sqrt{x}}$ .

**6.** Обчисліть  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3} \right)$ .

**7.** Доведіть, що:

1)  $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 = 16$ ;

2)  $\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 6x + 8) = 8$ ;

3)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{24}$ ;

4)  $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2$ .

**8.** Якщо функція  $f$  має границю при  $x \rightarrow x_0$ , то існує проколтий окіл точки  $x_0$ , у якому ця функція є обмеженою. Доведіть.

**9.** Обчисліть границі:

1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 - 4x^3 + 1}{(x-1)^2}$ ;

2)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{3x^2 + x}{(x-2)(x^2 + x + 1)} - \frac{2}{x-2} \right)$ .

**10.** Обчисліть границю

1)  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$ ;

2)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}}$ ;

**11.** Обчисліть  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$ .

**12.** Обчисліть границю  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}$ , де  $n, k \in \mathbb{N}$ .



## Рівень С

1. Обчисліть границю функції, де  $\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$  функція Діріхле:
  - 1)  $\lim_{x \rightarrow 0} x\mathfrak{D}(x)$ ;
  - 2)  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} (x - \sqrt{2})\mathfrak{D}(x)$ .
2. Обчисліть  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 36} - 6}$ .
3. Якщо  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ , причому  $a \neq 0$ , то знайдеться проколотий окіл точки  $x_0$ , на якому знак функції збігається зі знаком числа  $a$ . Доведіть.
4. Якщо  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  і існує проколотий окіл точки  $x_0$ , на якому  $f(x) \geq 0$ , то  $a \geq 0$ . Доведіть.
5. Обчисліть границю  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{101} - 101x + 100}{x^2 - 2x + 1}$ .
6. Обчисліть границю:
  - 1)  $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt[3]{9+x} + x + 7}{\sqrt[3]{15+2x} + 1}$ ;
  - 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{2x^2+10x+1} - \sqrt[7]{x^2+10x+1}}{x}$ ;
  - 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+4x} - \sqrt[4]{1+3x}}{1 - \sqrt[5]{1-5x}}$ ;
  - 4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - \sqrt[k]{1+bx}}{x}$ , де  $n, k \in \mathbb{N}$ .
7. **Творче завдання.** Виконайте аналітичне та графічне дослідження поведінки функції  $y = \frac{x^2 - 9}{x - 3} + \frac{6}{x + 3}$  в точці  $x = 3$ .

## VII. Рефлексія (2 хв)

Запропонуйте учням оцінити розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

### Мої враження від уроку

|         |   |   |   |   |   |   |   |   |        |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|---|--------|
| 1       | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10     |
| Жахливі |   |   |   |   |   |   |   |   | Чудові |

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

- 1) .....
- 2) .....
- ? .....
- .....
- .....

## Можливі теми проєктів

1. Що означає невизначеність виду  $\frac{0}{0}$  і як її застосовують у математиці та у фізиці.
2. Застосування границь у вимірювальних приладах і цифровій фільтрації.
3. Обчислення границь у задачах на швидкість, прискорення та зміну температури.
4. Аналіз похибок вимірювань через наближення до граничних значень.
5. Аналіз границь функцій в точках за допомогою комп'ютерних програм.