

11

Тема 1.

Границя та неперервність функції

Урок 7. Неперервність функції в точці. Теорема про арифметичні дії з неперервними функціями

Тип уроку: урок засвоєння нових знань.

План уроку

1. Означення неперервності функції в точці.
2. Графічна ілюстрація неперервності функції в точці.
3. Умова неперервності функції в точці.
4. Теорема про арифметичні дії з неперервними функціями.
5. Теорема про неперервність функцій синус та косинус на множині дійсних чисел.
6. Поняття складеної функції.
7. Теорема про неперервність складеної функції.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

оцінює достовірність і доцільність використання даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.2–1 П];

виявляє ініціативу, пропонує та обґрунтовує ідеї щодо способу розв'язання специфічних проблемних ситуацій [12 МАО 2.2.1–1 П];

оцінює обґрунтованість математичного розв'язання в контексті реальної комплексної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.3–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово впродовж викладення матеріалу.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.

- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.
- 6) Обов'язково пропонуйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.
- 7) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 8) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Робота над обраним проєктом може тривати впродовж вивчення (повторення) усієї змістової теми. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.
- 9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівні В або С.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Чи може температура миттєво змінитися, наприклад від $+20^{\circ}\text{C}$ до -20°C ? Чи вона поступово (навіть дуже швидко) набуває кожного проміжного від $+20^{\circ}\text{C}$ до -20°C значення?
- 2) Чи можна намалювати графік функції, не відриваючи олівця від паперу?
- Які функції мають таку властивість?
- 3) Чи існує функції яка «розривається» в кожній точці своєї області визначення?
- 4) Чому в реальних процесах (рух, нагрівання, зростання населення, зміна напруги) зазвичай використовують саме неперервні функції?
- 5) Чи завжди коли функція неперервна в точці, то вона має в цій точці границю?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Знайдіть область визначення функції $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$.
Відповідь. $D(f) = (-\infty; -2) \cup [2; +\infty)$.
2. Знайдіть границю $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$.
Відповідь. 8.

3. Чому дорівнює границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 3n}{2n^2 + 1}$.

Відповідь. 2.

4. Обчисліть $f(1)$, $f(2)$ і $f(3)$, якщо $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2, \\ \frac{1}{2}x + 3, & x \geq 2. \end{cases}$

Відповідь. 1; 4; 4,5.

5. Розв'яжіть нерівність $|3x - 4| < 2$.

Відповідь. $x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right)$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Під час випалювання керамічних виробів температура в печі змінюється з ча-

сом. Інженери описують цю зміну функцією $T(t) = \begin{cases} 20 + 5t, & 0 \leq t \leq 4, \\ a + bt, & 4 < t \leq 10, \end{cases}$ де t – час

у годинах, $T(t)$ — температура в печі (у °C). Відомо, що у момент часу $t = 4$ години температура повинна змінюватися без стрибка (інакше кераміка може тріснути), а у момент часу $t = 10$ годин температура дорівнює 130°C.

1) Знайдіть такі значення коефіцієнтів a і b , щоб функція температури була неперервною в момент часу $t = 4$ години.

2) Поясніть фізичний зміст умови неперервності в цій задачі.

3) Знайдіть температуру в печі через 6 годин після початку нагрівання.

III. Означення неперервності функції в точці (2 хв)

Якщо функція не визначена в точці, то вона не може бути неперервною в цій точці.

Означення (за Гейне). Функцію f називають **неперервною в точці x_0** , якщо для будь-якої збіжної до x_0 послідовності $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ значень аргументу функції f відповідна послідовність $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ значень функції збігається до числа $f(x_0)$.

Означення (за Коші). Функцію f називається **неперервною в точці x_0** , якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що з нерівності $|x - x_0| < \delta$ випливає нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

IV. Графічна ілюстрація неперервності функції в точці (3 хв)

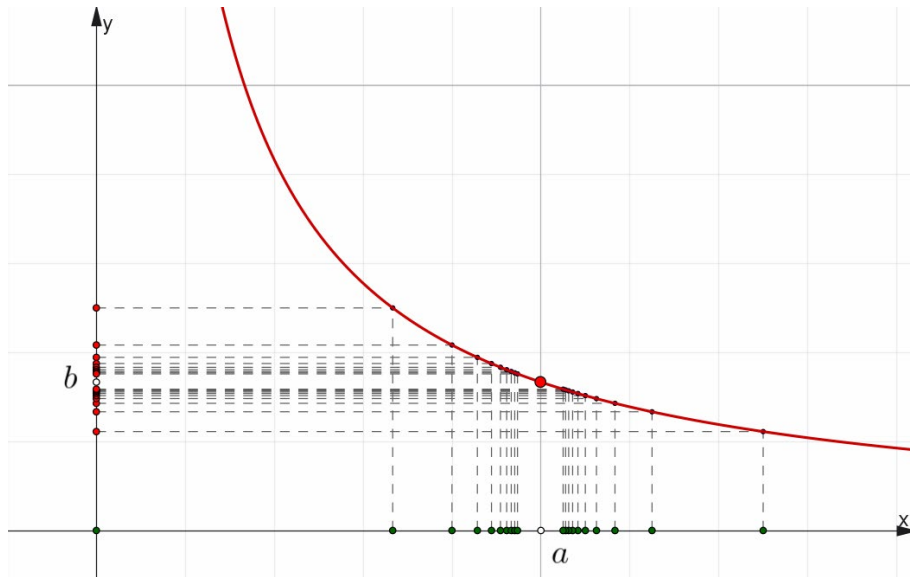
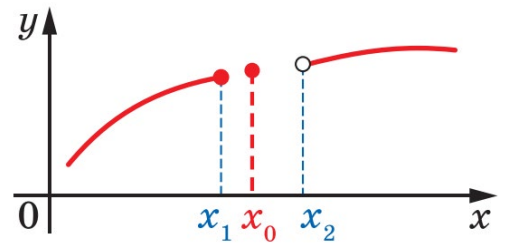
В означенні неперервності функції в точці за Гейне в порівнянні з означенням границі функції в точці відсутня вимога $x_n \neq x_0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Отже, послідовність x_n може містити нескінченно багато членів, які рівні x_0 або навіть повністю складатися лише з x_0 .

В означенні за Коші в порівнянні з означенням границі функції в точці умова з якої випливає нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ замінена з $0 < |x - x_0| < \delta$ на $|x - x_0| < \delta$.

Це означає, що наприклад функція, графік якої зображений на рисунку, неперервна в точці x_0 , хоча границі в цій точці немає.

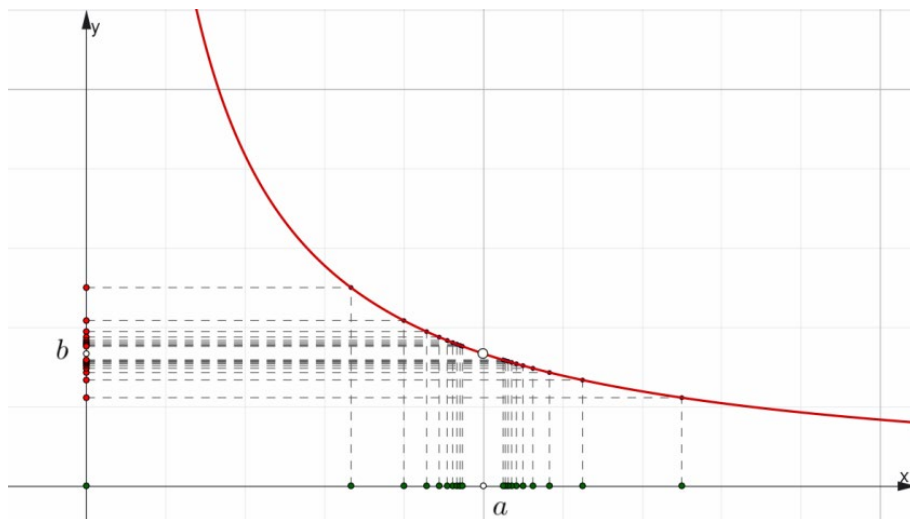
Так як і при введенні поняття границі функції в точці розглянемо три функції, які відрізняються лише своїми значеннями у деякій точці $x = a$:

1) Значення функції в точці a дорівнює b (див. рисунок).



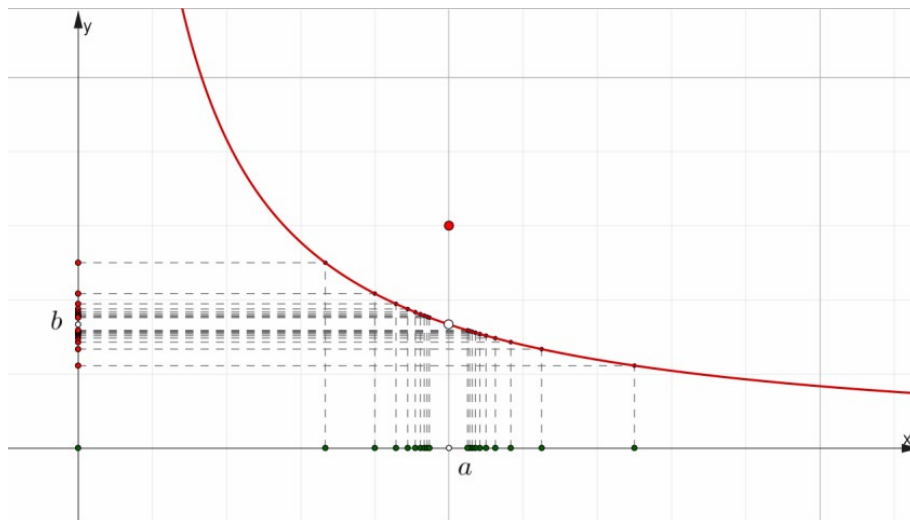
Границя функції в точці $x = a$ дорівнює b і за означенням функція неперервна в точці $x = a$.

2) Значення функції в точці a не існує (див. рисунок).



Границя функції в точці $x = a$ дорівнює b і тут варто зауважити, що коли функція не існує в якійсь точці, то вона не буде неперервною в цій точці.

3) Значення функції в точці a дорівнює якомусь відмінному від b числу (див. рисунок).

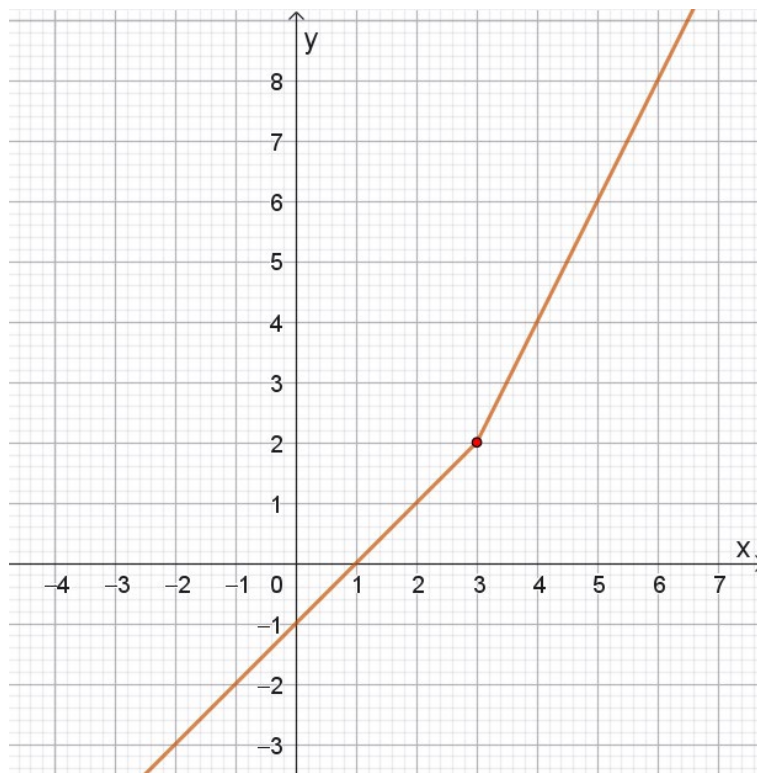


Границя функції в точці $x = a$ дорівнює b і за означенням функція не буде неперервною в точці $x = a$, тому що лише для стаціонарної послідовності $a, a, \dots, a, \dots$ відповідна послідовність $f(a), f(a), \dots, f(a), \dots$ збігається до числа $f(a)$, а для усіх інших, збіжних до числа a послідовностей, відповідні послідовностей значень функцій збігаються до числа b .

Ілюстративні приклади (3 хв)

6. Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 3, \\ 2x-4, & x > 3 \end{cases}$ та за графіком установіть чи є функція неперервною в точці $x = 3$.

Розв'язання.

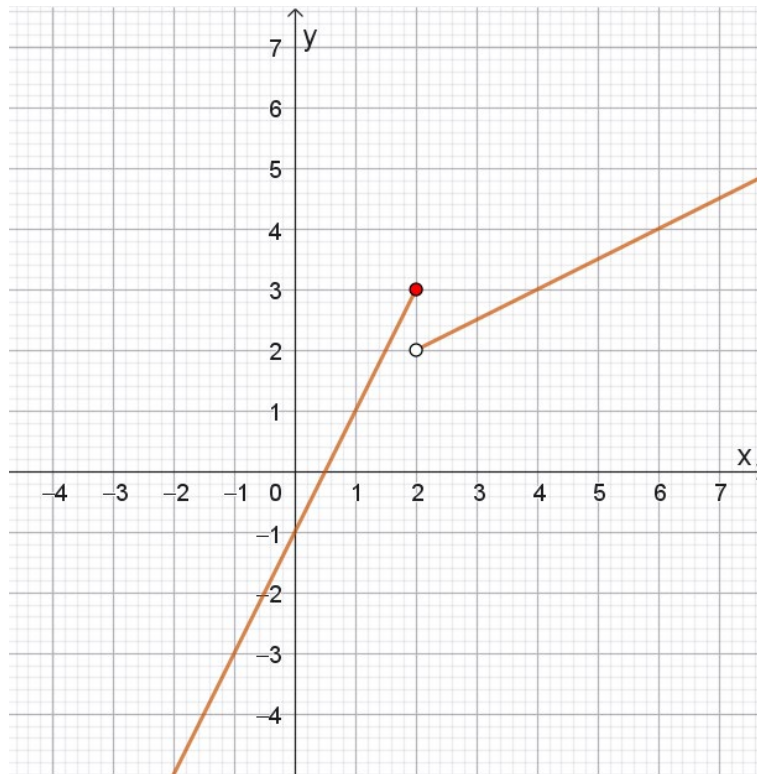


Розглянемо довільну збіжну до $x = 3$ послідовність x_n аргументів функції $y = f(x)$, тоді послідовність $f(x_n)$ збігається до числа 2, але $f(3) = 2$, тому функція $f(x)$ є неперервною в точці $x = 3$.

Відповідь. Так.

7. Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq 2, \\ 0,5x + 1, & x > 2 \end{cases}$ та за графіком установіть чи є функція неперервною в точці $x = 2$.

Розв'язання.



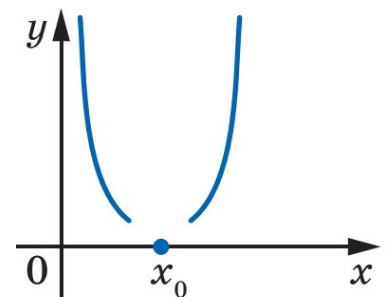
Розглянемо довільну збіжну до $x = 2$ послідовність x_n аргументів функції $y = f(x)$, тоді послідовність $f(x_n)$ не збігається до якогось конкретного числа, тому функція $f(x)$ не буде неперервною в точці $x = 2$.

Відповідь. Ні.

8. Функцію задано за допомогою графіка (див. рисунок). Установіть чи має функція границю в точці x_0 ? Чи є функція неперервною в точці x_0 .

Розв'язання. Оскільки існує єдина збіжна до x_0 послідовність $x_0, x_0, \dots, x_0, \dots$ значень аргументу функції f така, що відповідна послідовність $f(x_0), f(x_0), \dots, f(x_0), \dots$ значень функції збігається до числа $f(x_0)$, то за означенням функція є неперервною в точці x_0 .

Відповідь. Так.



V. Умова неперервності функції в точці (2 хв)

Теорема. Нехай функція f визначена хоча б на одному з проміжків $(x_0 - \delta; x_0]$ або $[x_0; x_0 + \delta)$, де $\delta > 0$. Тоді функція f неперервна в точці x_0 тоді й тільки тоді, коли $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Доведення. 1) Якщо функція неперервна в точці x_0 і визначена хоча б на одному з проміжків $(x_0 - \delta; x_0]$ або $[x_0; x_0 + \delta)$, де $\delta > 0$, то за означенням неперервності для будь-якої збіжної до x_0 послідовності $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ значень аргументу функції (навіть для таких, що $x_n \neq x_0$, для всіх $n \in \mathbb{N}$) відповідна послідовність $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ значень функції збігається до числа $f(x_0)$. Тому за означенням границі функції в точці $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

2) Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ і функція f визначена хоча б на одному з проміжків $(x_0 - \delta; x_0]$ або $[x_0; x_0 + \delta)$, тоді за означенням границі функції в точці для будь-якої збіжної до x_0 послідовності $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ значень аргументу функції, де $x_n \neq x_0$, для всіх $n \in \mathbb{N}$, відповідна послідовність $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ значень функції збігається до числа $f(x_0)$.

Якщо розглянути збіжну до x_0 послідовність, яка містить нескінченно багато членів, які рівні x_0 (або яка уся складається з x_0), то ця послідовність теж збігатиметься до $f(x_0)$, оскільки функція f визначена в точці x_0 . Тому за означенням неперервності функції в точці функція f — неперервна.

Якщо функція $f(x)$ визначена хоча б на одному з проміжків $(x_0 - \delta; x_0]$ або $[x_0; x_0 + \delta)$, де $\delta > 0$, то умову неперервності функції в точці x_0 можна також виразити рівністю $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$.

Ілюстративні приклади (3 хв)

9. Доведіть, що функція $f(x) = x^2 + x$ є неперервною в кожній точці її області визначення.

Доведення. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^2 + x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x^2 + \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0^2 + x_0 = f(x_0)$.

Тому функція f неперервна в будь-якій точці $x_0 \in \mathbb{R}$.

10. Доведіть, що функція Діріхле $\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q}, \\ 0, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ не є неперервною в кожній точці її області визначення.

Доведення. Оскільки функція Діріхле визначена на $\mathbb{R}$ і не має границі в жодній точці області визначення, тому вона не може бути неперервною в цих точках.

VI. Теорема про арифметичні дії з неперервними функціями (3 хв)

Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ неперервні в точці x_0 , то в цій точці неперервними є і функції $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x)g(x)$ і $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, за умови, що $g(x_0) \neq 0$.

Доведення. Розглянемо довільну збіжну до x_0 послідовність x_n аргументів функції $y = f(x) + g(x)$. Оскільки функції f і g є неперервними в точці x_0 , то $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(x_0)$.

За теоремою про границю суми збіжних послідовностей, маємо, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) + g(x_n)) = f(x_0) + g(x_0).$$

Це означає, що функція $y = f(x) + g(x)$ є неперервною в точці x_0 .

Аналогічно, за допомогою теорем про границю добутку і границю частки можна довести, що неперервними є також функції $y = f(x)g(x)$ і $y = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Якщо функція $f(x)$ є неперервною на множині $D(f)$, то таку функцію називають **неперервною**.

Ілюстративні приклади (3 хв)

- 11.** Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 2x^2 + 5x + 3)$.

Розв'язання. Оскільки користуючись теоремами про арифметичні дії з неперервними функціями можна встановити, що функція $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 3$ є неперервною, тому $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 2x^2 + 5x + 3) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 3 = 7$

Відповідь. 7.

- 12.** Доведіть, що функція $f(x) = \frac{x-1}{x^2+4}$ неперервна.

Доведення. Оскільки $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x-1}{x^2+4} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} (x-1)}{\lim_{x \rightarrow x_0} (x^2+4)} = \frac{x_0-1}{x_0^2+4} = f(x_0)$, то функція

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+4} \text{ є неперервною.}$$

VII. Теорема про неперервність функцій синус та косинус на множині дійсних чисел (5 хв)

Лема 1. Для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $|\sin x| \leq |x|$.

Доведення. Якщо $x = 0$ або $|x| \geq 1$, то нерівність, яка доводиться, є очевидною.

Якщо $x \in (0; 1)$, то кут x радіан знаходиться в куті першої чверті.

Площа трикутника $P_x O P_0$ менша від площі сектора $P_x O P_0$ (див. рисунок).

Площа трикутника $P_x O P_0$:

$$S_{\Delta P_x O P_0} = \frac{1}{2} O P_0^2 \sin x = \frac{1}{2} \sin x.$$

Площа сектора $P_x O P_0$:

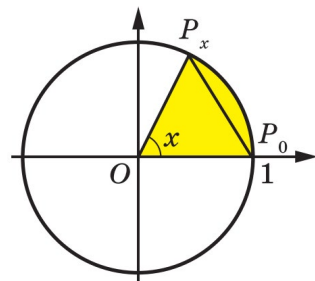
$$S_c = \frac{1}{2} O P_0^2 x = \frac{1}{2} x.$$

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x. \text{ Отримуємо: } \sin x < x.$$

Нехай $x \in (-1; 0)$. Тоді $-x \in (0; 1)$. Можна записати: $\sin(-x) < -x$. Звідси $\sin x > x$.

Отже, якщо $x \in (0; 1)$, то $0 < \sin x < x$. Тому $|\sin x| < |x|$; якщо $x \in (-1; 0)$, то $0 > \sin x > x$.

Тому $|\sin x| < |x|$.



Лема 2. Для будь-яких $x \in \mathbb{R}$ і $x_0 \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$|\sin x - \sin x_0| \leq |x - x_0|.$$

Доведення. $|\sin x - \sin x_0| = \left| 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right|.$

З леми 1 випливає, що $\left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leq \left| \frac{x - x_0}{2} \right|$. Тому можна записати:

$$|\sin x - \sin x_0| \leq 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x - x_0}{2} \right| = |x - x_0|.$$

Теорема. Функція $y = \sin x$ неперервна на $\mathbb{R}$.

Доведення. Нехай x_n — довільна послідовність така, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

$$\text{Тоді } \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x_0| = 0.$$

$$\text{За лемою 2: } -|x_n - x_0| \leq \sin x_n - \sin x_0 \leq |x_n - x_0|.$$

$$\text{За теоремою про двох конвоїрів: } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin x_n - \sin x_0) = 0.$$

Звідси $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = \sin x_0$. Оскільки послідовність (x_n) вибрано довільно, то це означає, що функція $y = \sin x$ є неперервною.

Теорема. Функція $y = \cos x$ неперервна на $\mathbb{R}$.

Доведення. Нехай x_n — довільна послідовність така, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

$$\text{Тоді } \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x_0| = 0.$$

$$\text{Оскільки } \cos x - \cos x_0 = -2 \sin \frac{x - x_0}{2} \sin \frac{x + x_0}{2}, \text{ то}$$

$$|\cos x - \cos x_0| = \left| -2 \sin \frac{x - x_0}{2} \sin \frac{x + x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| = |x - x_0|.$$

$$\text{Отже, } -|x_n - x_0| \leq \cos x_n - \cos x_0 \leq |x_n - x_0|.$$

$$\text{За теоремою про двох конвоїрів: } \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos x_n - \cos x_0) = 0.$$

Звідси $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos x_n = \cos x_0$. Оскільки послідовність (x_n) вибрано довільно, то це означає, що функція $y = \cos x$ є неперервною.

Ілюстративні приклади (2 хв)

- 13.** Доведіть, що функції $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ неперервні.

Доведення. Оскільки функції $y = \sin x$ та $y = \cos x$ є неперервними, то за теоремою про неперервність частки функцій, функції $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ є неперервними.

- 14.** Обчисліть границю функції $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + 4}$.

Розв'язання. Оскільки функції $y = \sin x$ та $y = \sqrt{x} + 4$ є неперервними, то за теоремою про неперервність частки функцій, функція $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x} + 4}$ є неперервною,

$$\text{тому } \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + 4} = \frac{\sin 2\pi}{\sqrt{2\pi} + 4} = 0.$$

Відповідь. 0.

VIII. Поняття складеної функції

Складена функція (або композиція функцій) — це функція, де аргументом є інша функція; вона записується як $f(g(x))$, де f — зовнішня функція, а g — внутрішня функція, яка подається як її аргумент.

Ілюстративні приклади (3 хв)

- 15.** Відомо, що $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sqrt{x} + 1$. Сконструйте функції $f(g(x))$, $g(f(x))$, $f(f(x))$, $g(g(x))$.

Розв'язання. $f(g(x)) = \sin(\sqrt{x} + 1)$, $g(f(x)) = \sqrt{\sin x} + 1$, $f(f(x)) = \sin(\sin x)$,
 $g(g(x)) = \sqrt{\sqrt{x} + 1} + 1$.

IX. Теорема про неперервність складеної функції (3 хв)

Теорема. Якщо функція $t = g(x)$ неперервна в точці x_0 , а функція $y = f(t)$ неперервна в точці t_0 , де $t_0 = g(x_0)$, то складена функція $y = f(g(x))$ є неперервною в точці x_0 .

Доведення. Нехай x_n — довільна послідовність значень аргументу функції $y = f(g(x))$ така, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Позначимо $t_n = g(x_n)$ і $y_n = f(t_n) = f(g(x_n))$.

Оскільки функція g є неперервною в точці x_0 , то послідовність $g(x_n)$, тобто послідовність t_n , збігається до числа $t_0 = g(x_0)$. Оскільки функція f є неперервною в точці t_0 і послідовність t_n збігається до числа t_0 , то послідовність $f(t_n)$, тобто послідовність y_n , збігається до числа $f(t_0) = f(g(x_0))$.

Отже, ми показали, що для будь-якої збіжної до x_0 послідовності x_n значень аргументу функції $y = f(g(x))$ відповідна послідовність y_n значень функції збігається до числа $f(g(x_0))$. Тому функція $y = f(g(x))$ є неперервною в точці x_0 .

Ілюстративний приклад

16. Знайдіть $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{2x+1}-3}$.

Розв'язання. Оскільки функція $f(x) = \sqrt{2x+1}-3$ є неперервною, то

$$\lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{2x+1}-3) = \sqrt{2 \cdot 4 + 1} - 3 = 0.$$

Отже, застосувати теорему про границю частки не можна.

Перетворимо дріб, який стоїть під знаком границі:

$$\begin{aligned} \frac{x-4}{\sqrt{2x+1}-3} &= \frac{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)} = \frac{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}{(2x+1)-9} = \\ &= \frac{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}{2(x-4)} = \frac{1}{2}(\sqrt{2x+1}+3) \end{aligned}$$

Оскільки функція $g(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{2x+1}+3)$ є неперервною, то можна записати:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{2}(\sqrt{2x+1}+3) = \frac{1}{2}(\sqrt{2 \cdot 4 + 1} + 3) = 3.$$

Відповідь. 3.

Х. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Під час випалювання керамічних виробів температура в печі змінюється з часом. Інженери описують цю зміну функцією $T(t) = \begin{cases} 20+5t, & 0 \leq t \leq 4, \\ a+bt, & 4 < t \leq 10, \end{cases}$ де t – час

у годинах, $T(t)$ — температура в печі (у °C). Відомо, що у момент часу $t = 4$ години температура повинна змінюватися без стрибка (інакше кераміка може тріснути), а у момент часу $t = 10$ годин температура дорівнює 130°C.

1) Знайдіть такі значення коефіцієнтів a і b , щоб функція температури була неперервною в момент часу $t = 4$ години.

2) Поясніть фізичний зміст умови неперервності в цій задачі.

3) Знайдіть температуру в печі через 6 годин після початку нагрівання.

Розв'язання. 1) За умовою функція $T(t)$ має бути неперервною, тому

$$\lim_{t \rightarrow 4} T(t) = T(4) = 40,$$

$$\text{тобто } \lim_{t \rightarrow 4} (a+bt) = a+4b = 40.$$

Також відомо, що $T(10) = 130$, тобто $a+10b = 130$.

$$\text{Складемо систему рівнянь } \begin{cases} a+4b = 40, \\ a+10b = 130. \end{cases}$$

Звідки $6b = 90$, $b = 15$, $a = -20$.

2) Неперервність означає, що температура не змінюється стрибком — тобто піч нагрівається плавно, без різких перепадів, що важливо для якості виробів.

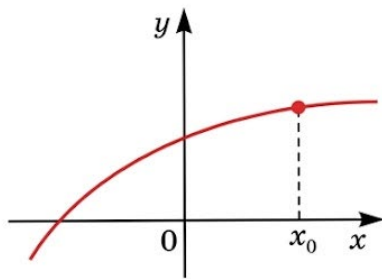
3) Маємо $T(t) = \begin{cases} 20 + 5t, & 0 \leq t \leq 4, \\ -20 + 15t, & 4 < t \leq 10, \end{cases}$ звідки $T(6) = -20 + 15 \cdot 6 = 70^\circ\text{C}$.

Відповідь. 1) $a = -20$, $b = 15$; 3) $T(6) = 70^\circ\text{C}$.

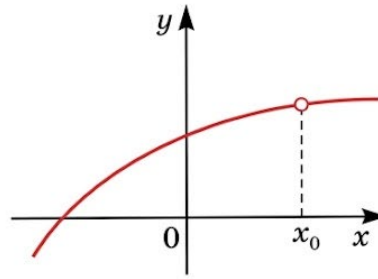
XI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (5–10 хв)

Рівень А

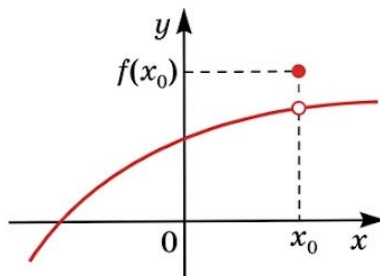
1. Чи є функція неперервною в точці x_0 ?



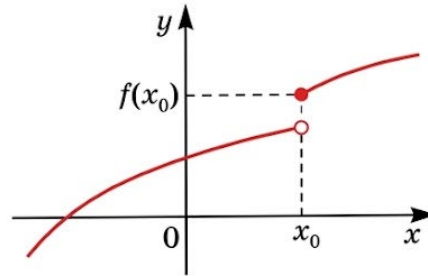
а)



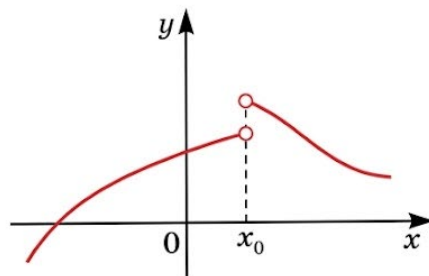
б)



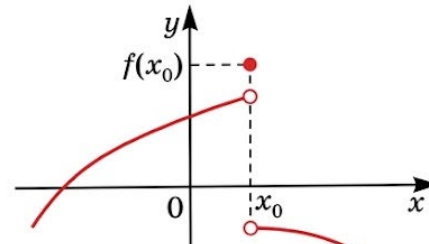
в)



г)



д)



е)

2. Обчисліть:

1) $\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin x$;

3) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x}$;

4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x$.

3. Дано функції $f(x) = 1 - 3x$ і $g(x) = x^2 - 1$. Задайте формулою функцію:

1) $y = f(g(x))$;

2) $y = f(f(x))$;

3) $y = g(f(x))$;

4) $y = g(g(x))$.

4. Доведіть, що функція f неперервна в точці x_0 :

1) $f(x) = 2x - 1, x_0 = 3$.

2) $f(x) = x^2, x_0 = 1$.

$$3) f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = -2.$$

$$4) f(x) = \sin 2x, x_0 = 0.$$

5. При яких значеннях x функція буде неперервною?

$$1) f(x) = \frac{3x^2 + x + 5}{2x^2 + 6x + 4};$$

$$2) f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 6x + 8}.$$

6. Дослідіть функцію $y = f(x)$ на неперервність в точках 1; 2; -1; 0, якщо:

$$1) y = \frac{x^2 - 1}{9};$$

$$2) y = \frac{1}{x + 1};$$

$$3) y = \frac{x}{x^2 + 1};$$

$$4) y = \frac{2}{x}.$$

Рівень В

1. Зобразіть схематично графік функції, яка описує процес. «Деякий тягар висить на нитці. Із збільшенням навантаження нитка поступово розтягується, і відстань l тягара від точки підвішування збільшується. Але для деякого критичного значення навантаження P_0 нитка обривається, тягар падає вниз, і його відстань від точки підвішування стрибкоподібно збільшується до значення L ».

2. Обчисліть:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1 - 3x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + 1}{x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos 4x;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right).$$

3. Доведіть, що функція $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0 \end{cases}$ неперервна в точці $x_0 = 0$.

4. Чи є неперервною функція $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{\cos x}, & x \neq \frac{\pi}{2}, \\ 1, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ в точці $x_0 = \frac{\pi}{2}$?

5. Про неперервну на $\mathbb{R}$ функцію f відомо, що $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{5n^2 + 1}{(3n - 1)(n + 1)}$, $n \in \mathbb{N}$. Знайдіть значення $f(0)$.

6. Дано функції $f(x) = \sqrt{x + 1}$ і $g(x) = x^2 - 2x$. Доведіть, що складені функції є неперервними:

$$1) y = f(g(x));$$

$$2) y = f(f(x));$$

$$3) y = g(f(x));$$

$$4) y = g(g(x)).$$

7. Доведіть, що функція f неперервна в точці x_0 :

$$1) f(x) = \begin{cases} \sin 2\pi x \operatorname{arctg} \frac{1}{x - 1}, & x \neq 1, \\ 0, & x = 1, \end{cases} \quad x_0 = 1.$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \sin x \operatorname{arctg} \frac{x}{x - \pi}, & x \neq \pi, \\ 0, & x = \pi, \end{cases} \quad x_0 = \pi.$$

8. Побудуйте графік функції $f(x) = \frac{4 - x^2}{2 - x}$. Чи неперервна вона у точці $x_0 = -1$? А в точці $x_0 = 2$?

9. Зобразіть графік будь-якої функції, яка не є неперервною в точках $x = n$, де $n \in \mathbb{N}$.

10. Зобразіть графік будь-якої функції, яка не є неперервною в точках $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, де $n \in \mathbb{Z}$.

11. Чи завжди буде розривною в заданій точці x_0 сума (добуток) двох функцій, якщо обидві функції в цій точці розривні? Наведіть приклади.

12. Дослідіть функцію на неперервність та побудуйте її графік:

$$1) f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1, & x \leq 1, \\ x - 4, & x > 1; \end{cases} \quad 2) f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0, \\ \frac{1}{2x}, & x < 0. \end{cases}$$

Рівень С

1. Знайдіть усі значення параметра a , при яких функція $f(x) = \begin{cases} a \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ a^2 - 4a, & x = 0 \end{cases}$ є неперервною в точці $x_0 = 0$.

2. Функції f і g визначені на $\mathbb{R}$. Чи може функція $h(x) = f(x) + g(x)$ бути неперервною в точці x_0 , якщо:

- 1) функція f є неперервною в точці x_0 , а функція g не є неперервною в точці x_0 ;
- 2) функції f і g не є неперервними в точці x_0 ?

3. Користуючись означенням, доведіть неперервність функції $\varphi(x)$ на інтервалі $(-\infty; \infty)$, якщо:

- 1) $\varphi(x) = x^3 + x$;
- 2) $\varphi(x) = x^2 + 2x - 1$.

4. Довизначте функцію $f(x)$ в точці $x = 0$ так, щоб вона стала неперервною в цій точці:

- 1) $f(x) = \frac{3x^3 - 2x}{5x}$;
- 2) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1}$.

5. Дослідіть функцію на неперервність та побудуйте її графік $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0, \\ x^2 + 1, & 0 < x < 1, \\ x, & x \geq 1. \end{cases}$

6. Про визначену на $\mathbb{R}$ функцію f відомо, що вона не є неперервною в жодній точці. Чи може існувати границя $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?

7. Творче завдання. Змодельуйте довільний неперервний процес у середовищі GeoGebra.

XII. Рефлексія (1 хв)

1) Я сьогодні навчився/навчилася

2) Мені здалося цікавим

3) У мене залишилися запитання щодо

.....

.....

Можливі теми учнівських проєктів

1. Графічне дослідження неперервних і розривних функцій.
2. Моделювання реальних процесів за допомогою кусково-аналітичних функцій.
3. Неперервні моделі в економіці: зміна ціни та попиту.
4. Неперервність у біології: ріст організмів і популяцій.
5. Неперервні перетворення в комп'ютерній графіці.

Список використаних джерел

- 1) Алгебра : підручн. для 11 кл. з поглибленим вивченням математики : у 2 ч. / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Харків : Гімназія, 2011. Ч. 1. — 256 с. : іл.
- 2) Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень : підручн. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. — Київ : Освіта, 2018. — 336 с.