

Границя та неперервність функції

Урок 8. Урок–практикум. Моделювання складених функцій. Обчислення границь неперервних функцій

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) моделювати складені функції;
- 2) доводити твердження про неперервність функцій за допомогою означень і властивостей;
- 3) обчислювати границі неперервних функцій;
- 4) використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{4 - |x|} + \frac{1}{x + 2}$.
2. Дано функцію $f(x) = 1 - 3x$. Задайте формулою функцію $f\left(\frac{1}{x}\right)$.
3. Відомо, що $D(f) = [-1; 4]$. Знайдіть область визначення функції $f(-x)$.
4. Знайдіть нулі функції $y = \sqrt{x - 1} \cdot \sqrt{x + 1}$.
5. Непарні функції $f(x)$ і $g(x)$ такі, що функція $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ визначена. Дослідіть на парність функцію h .

III. Моделювання складених функцій

Нагадаємо, що складена функція (або композиція функцій) — це функція, де аргументом є інша функція; вона записується як $f(g(x))$, де f — зовнішня функція, а g — внутрішня функція, яка подається як її аргумент.

Приклад 1. Задані функції $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x^2 + 3$. Знайдіть складені функції $f(g(x))$ і $g(f(x))$ та обчисліть значення цих функцій в точці $x = 2$.

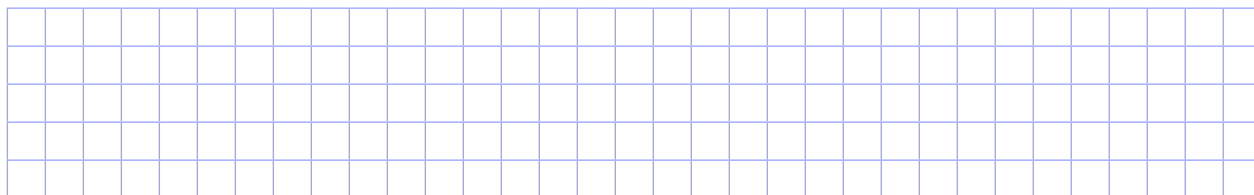
Розв'язання. $f(g(x)) = 2 \cdot (x^2 + 3) - 1 = 2x^2 + 5$, $f(g(2)) = 2 \cdot 2^2 + 5 = 13$.

$$g(f(x)) = (2x - 1)^2 + 3 = 4x^2 - 4x + 1 + 3 = 4x^2 - 4x + 4$$

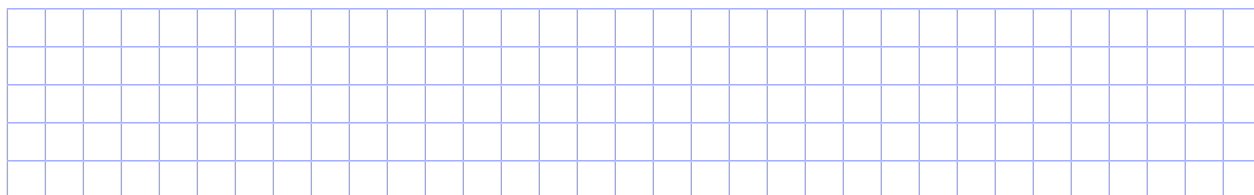
$$g(f(2)) = 4 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 4 = 16 - 8 + 4 = 12$$

Відповідь. 13; 12.

Приклад 2. Нехай $f(x) = \sqrt{x+4}$, $g(x) = 3x - 5$. Запишіть функції $f(g(x))$ і $g(f(x))$ та вкажіть області визначення цих функцій.



Приклад 3. Задані функції $f(x) = x^2$, $g(x) = x - 1$, $h(x) = \sqrt{x}$. Змодельуйте функції $f(g(x))$, $g(h(x))$, $h(f(x))$, $f(g(h(x)))$.



IV. Доведення неперервності функцій

1. Для того, щоб довести, що функція неперервна в точці можна скористатися означеннями.

Означення (за Гейне). Функцію f називають **неперервною в точці x_0** , якщо для будь-якої збіжної до x_0 послідовності $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ значень аргументу функції f відповідна послідовність $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ значень функції збігається до числа $f(x_0)$.

Означення (за Коші). Функцію $f(x)$ називається **неперервною в точці x_0** , якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що з нерівності $|x - x_0| < \delta$ випливає нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

2. Умова неперервності функції в точці.

Теорема. Нехай функція $f(x)$ визначена хоча б на одному з проміжків $(x_0 - \delta; x_0]$ або $[x_0; x_0 + \delta)$, де $\delta > 0$. Тоді функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 тоді й тільки тоді, коли $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

3. За допомогою теорем про границі суми, добутку та частки неперервних функцій.

Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ неперервні в точці x_0 , то в цій точці неперервними є і функції $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x)g(x)$ і $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ (остання за умови, що $g(x_0) \neq 0$).

4. Іноді користуються додатковою умовою неперервності функції в точці:

Функція f буде неперервною в точці x_0 , якщо $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$.

5. Також сформулюємо (без доведення) властивість про неперервність обернених функцій: якщо оборотна функція $f(x)$ визначена на деякому проміжку та є неперервною, то обернена до неї функція g також буде неперервною.

Приклад 4. Доведіть, що функція $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3}, & x \neq 3, \\ 6, & x = 3 \end{cases}$ є неперервною в точці $x = 3$.

Доведення. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 3 + 3 = 6, f(3) = 6$.

Неперервність заданої функції в точці $x = 3$ випливає з того, що значення цієї функції дорівнює границі функції в цій точці.

Приклад 5. Доведіть, що функція $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1, \\ 3x - 2, & x \geq 1 \end{cases}$ є неперервною в точці $x = 1$.

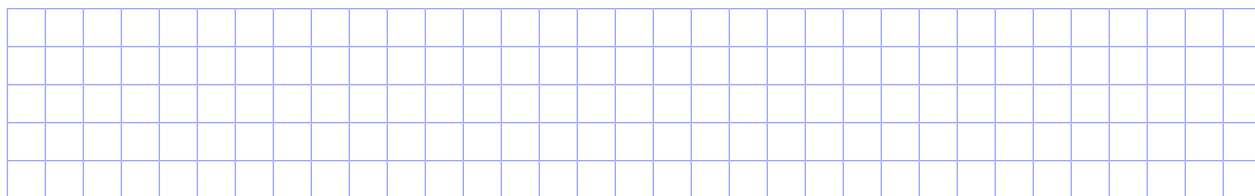
Доведення. Оскільки $f(1) = 1$, то для розв'язування задачі досить показати, що $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(1 + \Delta x) - 1) = 0$. Розглянемо два випадки:

1) $\Delta x < 0$. Тоді маємо $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} ((1 + \Delta x)^2 - 1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} ((\Delta x)^2 + 2\Delta x) = 0$.

2) $\Delta x > 0$. У цьому випадку $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3(1 + \Delta x) - 3) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 3\Delta x = 0$.

Що й треба було довести.

Приклад 6. Доведіть, що функція $f(x) = \frac{x}{x+1}$ є неперервною в точці $x = 2$.



Приклад 7. Довизначте функцію $f(x) = \frac{\sqrt{4+x} - 2}{x}$ так, щоб нова функція була неперервною в точці $x = 0$.

Розв'язання. Обчислимо границю заданої функції в точці $x = 0$. Маємо:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4+x}-2)(\sqrt{4+x}+2)}{x(\sqrt{4+x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{4+x}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4+x}+2} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Якщо тепер за значення функції в точці $x = 0$ взяти число $\frac{1}{4}$, то функція стане неперервною в цій точці.

$$\text{Отже, } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x}, x \neq 0, \\ \frac{1}{4}, x = 0. \end{cases}$$

$$Bi\partial\nu\partial\nu. f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x}, x \neq 0, \\ \frac{1}{4}, x = 0. \end{cases}$$

Приклад 8. Користуючись означенням неперервності функції за Коші доведіть, що функція $y = ax + b$ є неперервною в кожній точці.

Доведення. Візьмемо будь-яке $\varepsilon > 0$. Тоді для будь-якого $x_0 \in \mathbb{R}$ маємо

$$|f(x) - f(x_0)| = |ax + b - ax_0 - b| = |a| |x - x_0| < \varepsilon.$$

Ця нерівність виконується тоді коли $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{|a|} = \delta$.

Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що із нерівності $|x - x_0| < \delta$, слідує нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, тобто функція неперервна для будь-якого $x \in \mathbb{R}$.

Що й треба було довести.

V. Обчислення границь неперервних функцій

Обчислення границь неперервних функцій — це найпростіший випадок, бо для неперервної функції в точці x_0 , її границя дорівнює значенню функції в цій точці: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Це означає, що для обчислення, достатньо просто підставити значення x_0 у вираз функції.

Основний принцип. Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і границя функції $f(x)$ у цій точці існує, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Приклад 9. Знайдіть $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{x}$.

[illegible]

Приклад 10. Обчисліть $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$.

Розв'язання. Оскільки $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, то безпосередньо застосувати теорему про границю частки не можна, тому перетворимо вираз:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} &= \frac{(\sqrt[3]{1+x} - 1) \left((\sqrt[3]{1+x})^2 + \sqrt[3]{1+x} + 1 \right)}{x \left((\sqrt[3]{1+x})^2 + \sqrt[3]{1+x} + 1 \right)} = \frac{1+x-1}{x \left((\sqrt[3]{1+x})^2 + \sqrt[3]{1+x} + 1 \right)} = \\ &= \frac{1}{(\sqrt[3]{1+x})^2 + \sqrt[3]{1+x} + 1}. \end{aligned}$$

Функції $y = \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$ та $y = \frac{1}{(\sqrt[3]{1+x})^2 + \sqrt[3]{1+x} + 1}$ співпадають у всіх точках крім

$$x = 0, \text{ тому } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{1+x})^2 + \sqrt[3]{1+x} + 1} = \frac{1}{3}.$$

Відповідь. $\frac{1}{3}$.

VI. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Під час заповнення резервуара рідиною рівень рідини змінюється з часом за законом $h(t) = \sqrt{t+1}$, де t — час у хвилинах, h — рівень рідини в метрах. Тиск на дно резервуара залежить від рівня рідини за формулою $p(h) = \frac{h^2 + 3}{h+1}$. Дослідіть на неперервність функцію $p(t)$ та установіть значення до якого наближається тиск у момент часу, близький до 3 хвилин.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Нехай $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x + 2$. Знайдіть $f(g(x))$ і $g(f(x))$ та області визначення кожної складеної функції.

2. Обчисліть границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 5x + 1); \quad 2) \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{2x+5}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^2+4} - x); \quad 4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3}{2x+5};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{3x^2+1}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x); \quad 7) \lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{5x+4} - 2x); \quad 8) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5}}{x^2+2}.$$

3. Користуючись властивостями неперервних функцій обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 6x + 9)$;

2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - 2 \operatorname{tg} x)$;

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{x - 2}$;

4) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{6}} \frac{3 - 2x}{6x + 1}$.

4. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

5. Доведіть, що функція f неперервна в точці x_0 :

1) $f(x) = 3x + 1, x_0 = 3$.

2) $f(x) = x^2, x_0 = 3$.

3) $f(x) = \frac{1}{x - 2}, x_0 = -2$.

4) $f(x) = \cos 3x, x_0 = 0$.

6. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 - 1}{x^2 + 3x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{2 + 3x^4}$;

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{8 + x^3} - 2x}{x\sqrt{2 - x}}$;

4) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\sqrt{10 + 3x} + 5}$.

Рівень В

1. Задані функції $f(x) = \sqrt{2x - 1}$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x - 3$. Знайдіть складені функції $f(g(x))$, $g(h(x))$, $f(g(h(x)))$ та запишіть їхні області визначення.

2. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$.

3. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 1} - 1}{x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x + 1} - 2}{x - 1}$.

4. Обчисліть, користуючись неперервністю функції в точці:

1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 9}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2}$;

3) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + x - 2}$;

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$.

5. Дано функції $f(x) = \sin x$ і $g(x) = x^3 + x$. Змодельуйте складені функції та доведіть, що вони є неперервними:

1) $y = f(g(x))$;

2) $y = f(f(x))$;

3) $y = g(f(x))$;

4) $y = g(g(x))$.

6. Знайдіть точки розриву функції:

1) $f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 6}$;

2) $f(x) = \frac{x + 2}{|x - 3| - 2}$;

3) $f(x) = \frac{x^3 + 8}{x + 2}$;

4) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{6x - 1} - 9x^2}$.

7. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x + 4} - 3}{x - 5}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x} - 2}{x^2 - 4}$;

3) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{5 + x} - 2}{x^2 + 5x + 4}$;

4) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{5 - x} - 3}{x^2 - 16}$.

8. Задані функції $f(x) = x^2 + 3x$, $g(x) = \sin(x - 1)$, $h(x) = \sqrt{x}$. Змодельуйте функції $f(g(x))$, $g(h(x))$, $h(f(x))$, $f(g(h(x)))$ та доведіть, що вони неперервні.

9. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|-x^2 - 2x + 3|}{|x - 1|}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 6x + 8|}{|x - 2|}$.

10. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 - 9x}{(x + 3)(x - 1)}$;

2) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x - x^3}{2x^2 + 3x - 2}$;

3) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1 + x} - 1)$;

4) $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{2 + x} - \sqrt{2})$.

11. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 0,5} (2 \arcsin x + 3 \arccos x)$;

2) $\lim_{x \rightarrow -0,5} \frac{\arccos x + \pi \sin \pi x}{\pi \cos \pi x + 2 \arcsin x}$;

3) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} (2 \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} x)$;

4) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 \operatorname{arctg} x + \pi}{\cos x - \cos(-x) + \operatorname{arctg} x}$.

12. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x + \sin x}{\cos 3x + \cos x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin 5x + \sin 3x}$.

Рівень С

1. Наведіть приклад функції $y = f(x)$, визначеної на множині дійсних чисел, розривною в кожній точці, але такої, щоб при цьому функція $y = f^2(x)$ була неперервною в кожній точці.

2. Чи існує визначена на множині дійсних чисел неперервна функція f така, що число $f(x)$ раціональне тоді і тільки тоді, коли число $f(x + 1)$ ірраціональне?

3. Користуючись теоремами про неперервність функції в точці обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - x^4}{x^8 - 1}$;

2) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{3}{x^3 + 1} - \frac{1}{x + 1} \right)$;

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 - 4x^2 + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$;

4) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^4 - 6x^2 - 27}{x^3 + 3x^2 + x + 3}$.

4. При якому значенні b функція $f(x)$ буде неперервною в точці x_0 :

1) $f(x) = \begin{cases} x + b, & x \leq 3, \\ x^2 - 4, & x > 3, \end{cases} \quad x_0 = 3;$

2) $f(x) = \begin{cases} |x - b|, & x \leq 3, \\ \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{x - 3}, & x > 3, \end{cases} \quad x_0 = 3?$

5. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - x}{\sqrt[3]{x - 2} - 1}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt[3]{x - 1} - 2}{x - 9}$.

6. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x + 3} + \sqrt[3]{x + 1}}{x + 2}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - x - 2}{\sqrt[3]{x^2 + 4} - 2}$;

3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 7} - 3}{\sqrt[3]{x + 6} - 2}$;

4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{\sqrt[3]{2x - 3} - \sqrt[3]{x - 2}}$.

- 7. Творче завдання.** Напишіть програму, яка моделює складені функції за двома заданими функціями.

Рефлексія

- | | | | |
|-----------|---|------------------------|----|
| 1. | Я вмію моделювати складені функції. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я вмію доводити твердження про неперервність функцій, за допомогою означень і властивостей. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я вмію обчислювати границі неперервних функцій. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

1. Геометрична інтерпретація границі складеної функції.
2. Застосування властивостей неперервних функцій для обчислення границь складених функцій.
3. Типові помилки під час знаходження границь функцій.
4. Границя складеної функції та границі її компонент.
5. Неперервність та комп'ютерна анімація.







