

11

Тема 1.

Границя та неперервність функції

Урок 8. Урок–практикум. Моделювання складених функцій. Обчислення границь неперервних функцій

Тип уроку: урок формування навичок і вмінь.

План уроку

1. Моделювання складених функцій.
2. Доведення неперервності функцій.
3. Обчислення границь неперервних функцій.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

виявляє ініціативу, пропонує та обґрунтовує ідеї щодо способу розв'язання специфічних проблемних ситуацій [12 МАО 2.2.1–1 П];

оцінює обґрунтованість математичного розв'язання в контексті реальної комплексної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.3–1 П];

визначає та усуває прогалини у власних математичних знаннях і вміннях у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 4.1.3–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово впродовж викладення матеріалу.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.

6) Обов'язково пропонуйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Робота над обраним проєктом може тривати впродовж вивчення (повторення) усієї змістової теми. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівні В або С.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чи може похибка датчика температури впливати на результат роботи автоматичної системи опалення? Як це пов'язано із неперервністю функцій?

2) Як буде поводити себе складена функція в точці, якщо у внутрішній функції в цій точці є розрив?

3) Чи завжди границя складеної функції в точці дорівнює значенню зовнішньої функції від границі внутрішньої?

4) Які умови гарантують неперервність складеної функції в точці?

5) Які властивості внутрішньої функції найбільше впливають на поведінку складеної?

II. Усно. Повторення (3–4 хв)

1. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{4 - |x|} + \frac{1}{x + 2}$.

Відповідь. $D(y) = [-4; -2) \cup (-2; 4]$.

2. Дано функцію $f(x) = 1 - 3x$. Задайте формулою функцію $f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Відповідь. $f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{3}{x}$.

3. Відомо, що $D(f) = [-1; 4]$. Знайдіть область визначення функції $f(-x)$

Відповідь. $[-4; 1]$.

4. Знайдіть нулі функції $y = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}$.

Відповідь. 1.

5. Непарні функції $f(x)$ і $g(x)$ такі, що функція $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ визначена. Дослідіть на парність функцію h .

Відповідь. Функція парна.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Під час заповнення резервуара рідиною рівень рідини змінюється з часом за законом $h(t) = \sqrt{t+1}$, де t — час у хвиликах, h — рівень рідини в метрах. Тиск на дно резервуара залежить від рівня рідини за формулою $p(h) = \frac{h^2 + 3}{h+1}$. Дослідіть на неперервність функцію $p(t)$ та установіть значення до якого наближається тиск у момент часу, близький до 3 хвилин.

III. Моделювання складених функцій

Нагадаємо, що складена функція (або композиція функцій) — це функція, де аргументом є інша функція; вона записується як $f(g(x))$, де f — зовнішня функція, а g — внутрішня функція, яка подається як її аргумент.

Ілюстративні приклади (5 хв)

6. Задані функції $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x^2 + 3$. Знайдіть складені функції $f(g(x))$ і $g(f(x))$ та обчисліть значення цих функцій в точці $x = 2$.

Розв'язання. $f(g(x)) = 2 \cdot (x^2 + 3) - 1 = 2x^2 + 5$, $f(g(2)) = 2 \cdot 2^2 + 5 = 13$.

$$g(f(x)) = (2x - 1)^2 + 3 = 4x^2 - 4x + 1 + 3 = 4x^2 - 4x + 4$$

$$g(f(2)) = 4 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 4 = 16 - 8 + 4 = 12$$

Відповідь. 13; 12.

7. Нехай $f(x) = \sqrt{x+4}$, $g(x) = 3x - 5$. Запишіть функції $f(g(x))$ і $g(f(x))$ та вкажіть області визначення цих функцій.

Розв'язання. $f(g(x)) = \sqrt{3x - 5 + 4} = \sqrt{3x - 1}$, $D(f(g(x))) = \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

$$g(f(x)) = 3\sqrt{x+4} - 5, D(g(f(x))) = [-4; +\infty).$$

Відповідь. $D(f(g(x))) = \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$, $D(g(f(x))) = [-4; +\infty)$.

8. Задані функції $f(x) = x^2$, $g(x) = x - 1$, $h(x) = \sqrt{x}$. Змодельуйте функції $f(g(x))$, $g(h(x))$, $h(f(x))$, $f(g(h(x)))$.

Розв'язання. $f(g(x)) = (x - 1)^2$, $g(h(x)) = \sqrt{x} - 1$, $h(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x|$,

$$f(g(h(x))) = (\sqrt{x} - 1)^2.$$

IV. Доведення неперервності функцій

1. Для того, щоб довести, що функція неперервна в точці можна скористатися означеннями.

Означення (за Гейне). Функцію f називають **неперервною в точці x_0** , якщо для будь-якої збіжної до x_0 послідовності $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ значень аргументу функції f відповідна послідовність $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ значень функції збігається до числа $f(x_0)$.

Означення (за Коші). Функцію $f(x)$ називається **неперервною в точці x_0** , якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що з нерівності $|x - x_0| < \delta$ випливає нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

2. Умова неперервності функції в точці.

Теорема. Нехай функція $f(x)$ визначена хоча б на одному з проміжків $(x_0 - \delta; x_0]$ або $[x_0; x_0 + \delta)$, де $\delta > 0$. Тоді функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 тоді й тільки тоді, коли $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

3. За допомогою теорем про границі суми, добутку та частки неперервних функцій.

Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ неперервні в точці x_0 , то в цій точці неперервними є і функції $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x)g(x)$ і $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ (остання за умови, що $g(x_0) \neq 0$).

4. Іноді користуються додатковою умовою неперервності функції в точці:

Функція f буде неперервною в точці x_0 , якщо $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$.

5. Також сформулюємо (без доведення) властивість про неперервність обернених функцій: якщо оборотна функція $f(x)$ визначена на деякому проміжку та є неперервною, то обернена до неї функція g також буде неперервною.

Ілюстративні приклади (5 хв)

9. Доведіть, що функція $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3}, & x \neq 3, \\ 6, & x = 3 \end{cases}$ є неперервною в точці $x = 3$.

Доведення. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 3 + 3 = 6, f(3) = 6$.

Неперервність заданої функції в точці $x = 3$ випливає з того, що значення цієї функції дорівнює границі функції в цій точці.

10. Доведіть, що функція $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1, \\ 3x - 2, & x \geq 1 \end{cases}$ є неперервною в точці $x = 1$.

Доведення. Оскільки $f(1) = 1$, то для розв'язування задачі досить показати, що $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(1 + \Delta x) - 1) = 0$. Розглянемо два випадки:

1) $\Delta x < 0$. Тоді маємо $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} ((1 + \Delta x)^2 - 1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} ((\Delta x)^2 + 2\Delta x) = 0$.

2) $\Delta x > 0$. У цьому випадку $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3(1 + \Delta x) - 3) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 3\Delta x = 0$.

Що й треба було довести.

11. Доведіть, що функція $f(x) = \frac{x}{x+1}$ є неперервною в точці $x = 2$.

Доведення. Обчислимо границю цієї функції в точці $x = 2$: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x+1} = \frac{2}{3}$

Отже, функція неперервна в точці $x = 2$, тому що $f(2) = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$ і $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$.

12. Довизначте функцію $f(x) = \frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$ так, щоб нова функція була неперервною в точці $x = 0$.

Розв'язання. Обчислимо границю заданої функції в точці $x = 0$. Маємо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4+x}-2)(\sqrt{4+x}+2)}{x(\sqrt{4+x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{4+x}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4+x}+2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Якщо тепер за значення функції в точці $x = 0$ взяти число $\frac{1}{4}$, то функція стане неперервною в цій точці.

$$\text{Отже, } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x}, & x \neq 0, \\ \frac{1}{4}, & x = 0. \end{cases}$$

$$\text{Відповідь. } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x}, & x \neq 0, \\ \frac{1}{4}, & x = 0. \end{cases}$$

13. Користуючись означенням неперервності функції за Коші доведіть, що функція $y = ax + b$ є неперервною в кожній точці.

Доведення. Візьмемо будь-яке $\varepsilon > 0$. Тоді для будь-якого $x_0 \in \mathbb{R}$ маємо

$$|f(x) - f(x_0)| = |ax + b - ax_0 - b| = |a| |x - x_0| < \varepsilon.$$

Ця нерівність виконується тоді коли $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{|a|} = \delta$.

Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що із нерівності $|x - x_0| < \delta$, слідує нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, тобто функція неперервна для будь-якого $x \in \mathbb{R}$.

Що й треба було довести.

V. Обчислення границь неперервних функцій

Обчислення границь неперервних функцій — це найпростіший випадок, бо для неперервної функції в точці x_0 , її границя дорівнює значенню функції в цій точці: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Це означає, що для обчислення, достатньо просто підставити значення x_0 у вираз функції.

Основний принцип. Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і границя функції $f(x)$ у цій точці існує, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ілюстративні приклади (5 хв)

14. Знайдіть $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{x}$.

Розв'язання. Оскільки функція $f(x) = \frac{2x-1}{x}$ є неперервною функцією в точці $x = 1$,

то $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{x} = \frac{2 \cdot 1 - 1}{1} = 1$

Відповідь. 1.

15. Обчисліть $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$.

Розв'язання. Оскільки $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, то безпосередньо застосувати теорему про границю частки не можна, тому перетворимо вираз:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} &= \frac{(\sqrt[3]{1+x} - 1) \left((\sqrt[3]{1+x})^2 + \sqrt[3]{1+x} + 1 \right)}{x \left((\sqrt[3]{1+x})^2 + \sqrt[3]{1+x} + 1 \right)} = \frac{1+x-1}{x \left((\sqrt[3]{1+x})^2 + \sqrt[3]{1+x} + 1 \right)} = \\ &= \frac{1}{(\sqrt[3]{1+x})^2 + \sqrt[3]{1+x} + 1}. \end{aligned}$$

Функції $y = \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$ та $y = \frac{1}{(\sqrt[3]{1+x})^2 + \sqrt[3]{1+x} + 1}$ співпадають у всіх точках крім

$x = 0$, тому $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{1+x})^2 + \sqrt[3]{1+x} + 1} = \frac{1}{3}$.

Відповідь. $\frac{1}{3}$.

VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Під час заповнення резервуара рідиною рівень рідини змінюється з часом за законом $h(t) = \sqrt{t+1}$, де t — час у хвиликах, h — рівень рідини в метрах. Тиск на дно резервуара залежить від рівня рідини за формулою $p(h) = \frac{h^2 + 3}{h + 1}$. Дослідіть на неперервність функцію $p(t)$ та установіть значення до якого наближається тиск у момент часу, близький до 3 хвилин.

Розв'язання. Змоделюємо складену функцію $p(t)$:

$$p(h(t)) = \frac{(\sqrt{t+1})^2 + 3}{\sqrt{t+1} + 1} = \frac{t + 4}{\sqrt{t+1} + 1}.$$

Оскільки функції $h(t) = \sqrt{t+1}$ та $p(h) = \frac{h^2 + 3}{h + 1}$ є неперервними, то неперервною є також функція $p(h(t))$, тому $\lim_{t \rightarrow 3} \frac{t + 4}{\sqrt{t+1} + 1} = \frac{3 + 4}{\sqrt{3+1} + 1} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$.

Відповідь. $2\frac{1}{3}$.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (5–10 хв)

Рівень А

1. Нехай $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x + 2$. Знайдіть $f(g(x))$ і $g(f(x))$ та області визначення кожної складеної функції.
2. Обчисліть границі:
 - 1) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 5x + 1)$; 2) $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{2x + 5}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^2 + 4} - x)$; 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3}{2x + 5}$;
 - 5) $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{3x^2 + 1}$; 6) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)$; 7) $\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{5x + 4} - 2x)$; 8) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x + 5}}{x^2 + 2}$.
3. Користуючись властивостями неперервних функцій обчисліть границі:
 - 1) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 6x + 9)$; 2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - 2 \operatorname{tg} x)$;
 - 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{x - 2}$; 4) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{6}} \frac{3 - 2x}{6x + 1}$.
4. Обчисліть границі:
 - 1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.
5. Доведіть, що функція f неперервна в точці x_0 :
 - 1) $f(x) = 3x + 1, x_0 = 3$. 2) $f(x) = x^2, x_0 = 3$.
 - 3) $f(x) = \frac{1}{x - 2}, x_0 = -2$. 4) $f(x) = \cos 3x, x_0 = 0$.

6. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 - 1}{x^2 + 3x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{2 + 3x^4}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{8 + x^3} - 2x}{x\sqrt{2 - x}}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\sqrt{10 + 3x} + 5}$.

Рівень В

1. Задані функції $f(x) = \sqrt{2x - 1}$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x - 3$. Знайдіть складені функції $f(g(x))$, $g(h(x))$, $f(g(h(x)))$ та запишіть їхні області визначення.

2. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$.

3. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{x - 1}$.

4. Обчисліть, користуючись неперервністю функції в точці:

1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 9}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2}$;
3) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + x - 2}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$.

5. Дано функції $f(x) = \sin x$ і $g(x) = x^3 + x$. Змодельуйте складені функції та доведіть, що вони є неперервними:

1) $y = f(g(x))$; 2) $y = f(f(x))$; 3) $y = g(f(x))$; 4) $y = g(g(x))$.

6. Знайдіть точки розриву функції:

1) $f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 6}$; 2) $f(x) = \frac{x + 2}{|x - 3| - 2}$;
3) $f(x) = \frac{x^3 + 8}{x + 2}$; 4) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{6x - 1} - 9x^2}$.

7. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{x - 5}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x} - 2}{x^2 - 4}$;
3) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{5+x} - 2}{x^2 + 5x + 4}$; 4) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{5-x} - 3}{x^2 - 16}$.

8. Задані функції $f(x) = x^2 + 3x$, $g(x) = \sin(x - 1)$, $h(x) = \sqrt{x}$. Змодельуйте функції $f(g(x))$, $g(h(x))$, $h(f(x))$, $f(g(h(x)))$ та доведіть, що вони неперервні.

9. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|-x^2 - 2x + 3|}{|x - 1|}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 6x + 8|}{|x - 2|}$.

10. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 - 9x}{(x + 3)(x - 1)}$; 2) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x - x^3}{2x^2 + 3x - 2}$;
3) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x} - 1)$; 4) $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{2+x} - \sqrt{2})$.

11. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 0,5} (2 \arcsin x + 3 \arccos x)$;

2) $\lim_{x \rightarrow -0,5} \frac{\arccos x + \pi \sin \pi x}{\pi \cos \pi x + 2 \arcsin x}$;

3) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} (2 \operatorname{arctg} x - \operatorname{arccotg} x)$;

4) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 \operatorname{arccotg} x + \pi x}{\cos x - \cos(-x) + \operatorname{arctg} x}$.

12. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x + \sin x}{\cos 3x + \cos x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin 5x + \sin 3x}$.

Рівень С

1. Наведіть приклад функції $y = f(x)$, визначеної на множині дійсних чисел, розривною в кожній точці, але такої, щоб при цьому функція $y = f^2(x)$ була неперервною в кожній точці.

2. Чи існує визначена на множині дійсних чисел неперервна функція f така, що число $f(x)$ раціональне тоді і тільки тоді, коли число $f(x + 1)$ ірраціональне?

3. Користуючись теоремами про неперервність функції в точці обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - x^4}{x^8 - 1}$;

2) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{3}{x^3 + 1} - \frac{1}{x + 1} \right)$;

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 - 4x^2 + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$;

4) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^4 - 6x^2 - 27}{x^3 + 3x^2 + x + 3}$.

4. При якому значенні b функція $f(x)$ буде неперервною в точці x_0 :

1) $f(x) = \begin{cases} x + b, & x \leq 3, \\ x^2 - 4, & x > 3, \end{cases} \quad x_0 = 3;$

2) $f(x) = \begin{cases} |x - b|, & x \leq 3, \\ \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{x - 3}, & x > 3, \end{cases} \quad x_0 = 3?$

5. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - x}{\sqrt[3]{x - 2} - 1}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt[3]{x - 1} - 2}{x - 9}$.

6. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x + 3} + \sqrt[3]{x + 1}}{x + 2}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - x - 2}{\sqrt[3]{x^2 + 4} - 2}$;

3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 7} - 3}{\sqrt[3]{x + 6} - 2}$;

4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{\sqrt[3]{2x - 3} - \sqrt[3]{x - 2}}$.

7. Творче завдання. Напишіть програму, яка моделює складені функції за двома заданими функціями.

VIII. Рефлексія (1–2 хв)

1. Я вмію моделювати складені функції.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

2. Я вмію доводити твердження про неперервність функцій, за допомогою означень і властивостей.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

- 3.** Я вмію обчислювати границі неперервних функцій.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|
- 4.** Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|

Можливі теми проєктів

- 1.** Геометрична інтерпретація границі складеної функції.
- 2.** Застосування властивостей неперервних функцій для обчислення границь складених функцій.
- 3.** Типові помилки під час знаходження границь функцій.
- 4.** Границя складеної функції та границі її компонент.
- 5.** Неперервність та комп'ютерна анімація.