

11

Тема 1.

Границя та неперервність функції

Урок 9. Урок–практикум. Обчислення границь неперервних функцій

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) обчислювати границі неперервних функцій;
- 2) знаходити значення параметрів, при яких задана функція є неперервною в точці;
- 3) використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} (4x^2 - 18x + 6)$.
2. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2 - 8x}{x^2 + 4x}$.
3. Чи є неперервною функція $f(x) = \begin{cases} x^3 + 4, & x \leq 2 \\ 5x^2, & x > 2 \end{cases}$ в точці $x_0 = 2$?
4. Знайдіть нулі функції $y = |x| + x$.

III. Обчислення границь неперервних функцій

Нагадаємо, що для того щоб обчислити границю неперервної функції в деякій точці x_0 , достатньо просто підставити значення x_0 у вираз функції.

Основний принцип. Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і границя функції $f(x)$ у цій точці існує, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Якщо в точці x_0 функція не неперервна, то можна знайти границю функції в точці x_0 , якщо при безпосередній підстановці значення x_0 у функцію ми отримуємо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Часто потрібно просто скоротити множник $(x - x_0)$ який безпосередньо впливає на цю невизначеність і знайти границю неперервної в точці x_0 функції, яка співпадає з початковою функцією в усіх точках крім x_0 .

Звичайно існують і інші методи обчислення границь при цій невизначеності. Ми розглянемо деякі з них на наступних уроках.

Приклад 1. Знайдіть $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x} - 2}{x - 1}$.

Розв'язання. При безпосередній підстановці числа 1 у функцію $f(x) = \frac{\sqrt{3+x} - 2}{x - 1}$

маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$. Щоб скоротити множник $(x - 1)$ домножимо чисельник

і знаменник на вираз $(\sqrt{3+x} + 2)$ — спряжений до чисельника.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{3+x} - 2)(\sqrt{3+x} + 2)}{(x - 1)(\sqrt{3+x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)}{(x - 1)(\sqrt{3+x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{3+x} + 2} = \frac{1}{4}.$$

Функція $g(x) = \frac{1}{\sqrt{3+x} + 2}$ є неперервною в точці $x = 1$ і співпадає з функцією

$$f(x) = \frac{\sqrt{3+x} - 2}{x - 1} \text{ в кожній точці крім } x = 1.$$

Відповідь. $\frac{1}{4}$.

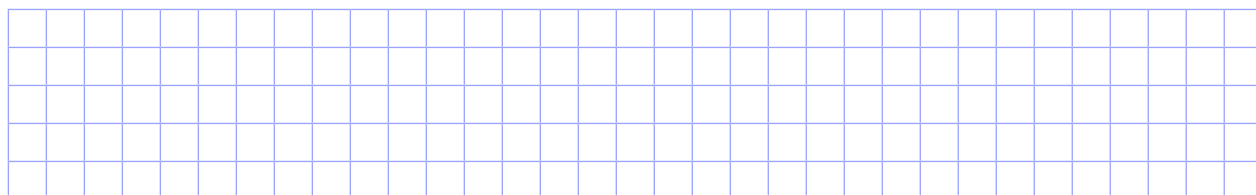
Приклад 2. Обчисліть $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}$.

Розв'язання. Оскільки $\lim_{x \rightarrow 8} (\sqrt[3]{x} - 2) = 0$, то безпосередньо застосувати теорему про границю частки не можна, тому:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt{9+2x} - 5)(\sqrt{9+2x} + 5)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{4})}{(\sqrt[3]{x} - 2)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{4})(\sqrt{9+2x} + 5)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{2(x - 8)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{4})}{(x - 8)(\sqrt{9+2x} + 5)} = \frac{12}{5}. \end{aligned}$$

Відповідь. $\frac{12}{5}$.

Приклад 3. Обчисліть $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$.



Приклад 4. Обчисліть $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{3x^2 - 9x}$.

[illegible]

Приклад 5. Обчисліть $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{\sqrt{5x + 1} - 4}$.

[illegible]

IV. Знаходження значень параметрів, при яких задана функція є неперервною в точці

Орієнтовний алгоритм для розв'язування вправ на знаходження значень параметрів, при яких функція є неперервною в точці

Якщо функція містить параметр (наприклад, a), то для того, щоб вона була непервною в точці x_0 , необхідно:

- 1.** Знайти границю функції при $x \rightarrow x_0$.
- 2.** Обчислити значення функції в точці x_0 .
- 3.** Прирівняти границю до значення функції та знайти такі значення параметра, при яких виконується рівність.

Приклад 6. Знайдіть усі значення параметра a , при яких функція $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-a^2}, & x \neq 1, \\ a^2+a, & x = 1 \end{cases}$

неперервна в точці $x_0 = 1$.

Розв'язання. У випадку, коли $a^2 \neq 1$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$, і для того, щоб дана функція була неперервною в точці $x_0 = 1$, необхідно $f(1) = a^2 + a = 0$. Звідси $a = 0$ або $a = -1$. Оскільки при $a = -1$ $a^2 = 1$, то придатним значенням параметра тут є лише $a = 0$. Якщо $a^2 = 1$, то $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$. Тут значення a , які задовольняють умові, знайдемо

3 системи $\begin{cases} a^2 = 1, \\ a^2 + a = 2. \end{cases}$

Звідси $a = 1$.

Відповідь. 0; 1.

Приклад 7. Знайдіть значення параметра p за яких функція $f(x) = \begin{cases} px^2 + 2, & x \leq 0, \\ 3x + p, & x > 0 \end{cases}$ є не-

перервною в точці $x = 0$.

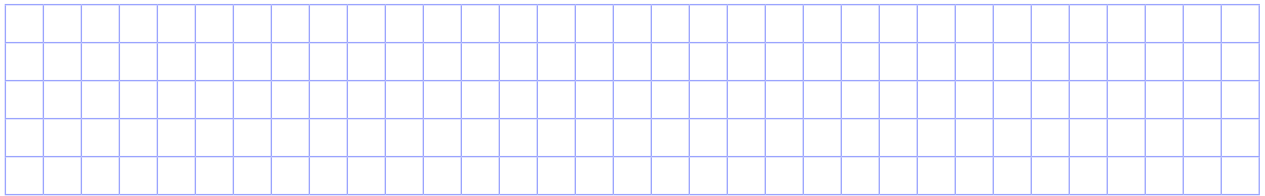
Розв'язання. $f(0) = p + 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3x + p) = p + 2, \quad p = p + 2, \quad 0 = 2.$$

Отже, таких значень параметра p не існує.

Відповідь. Таких значень не існує.

Приклад 8. Знайдіть значення параметра p за яких функція $f(x) = \begin{cases} px^2 + 2, & x \leq 0, \\ 3x + p, & x > 0 \end{cases}$ є неперервною в точці $x = 1$.



V. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Електронний термометр працює у двох режимах обробки сигналу. При температурах нижче за певне значення використовується одна формула, а при вищих — інша. Щоб покази термометра не набували стрибкоподібного характеру, температура повинна змінюватися неперервно. Залежність виміряної температури T (у $^{\circ}\text{C}$) від реальної температури x описується функцією

$$T(x) = \begin{cases} 2x + m, & x \leq 5, \\ x^2 - 10x - m + 30, & x > 5. \end{cases}$$

Знайдіть значення параметра m , якщо відомо, що функція $T(x)$ неперервна в точці $x = 5$.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 5x + 3);$

2) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 3};$

3) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 7x - 1}{x^3 + 4x^2 - 2x + 1};$

4) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 - 7x^2 + 5x - 2}{4x^2 + 6x - 8}.$

2. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3};$

2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}.$

3. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x} + 2};$

2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}.$

4. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sin \pi x}{x - 1};$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \pi x}{x + 2};$

3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin \frac{\pi}{x}}{2x + 1};$

4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos \frac{2\pi}{x}}{3x - 1}.$

5. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 - x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x - 3}$;

3) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x^2 + x}$;

4) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x + 5}{x^2 + 5x}$.

6. Обчисліть:

1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} x$;

2) $\lim_{x \rightarrow -1} \operatorname{arctg} x$;

3) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x$;

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \arccos x$.

Рівень В

1. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{4 - x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$;

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$;

4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5 - x} - 2}{\sqrt{2 - x} - 1}$.

2. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^7 + 5x^5 + 4x^3}{x^7 + 2x^3}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1 - x^3} + \frac{1}{x - 1} \right)$;

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[5]{x}}$;

4) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{6 - x} - 1}{3 - \sqrt{4 + x}}$.

3. Знайдіть усі значення параметра m , при яких функція $f(x) = \begin{cases} x^2 + m, & x \leq 1, \\ 2x + m - 1, & x > 1 \end{cases}$ неперервна в точці $x_0 = 1$.

4. Знайдіть усі значення параметра k , при яких функція $f(x) = \begin{cases} kx + 4, & x \leq -1, \\ x^2 + 3, & x > -1 \end{cases}$ неперервна в точці $x_0 = -1$.

5. Знайдіть усі значення параметра a , при яких функція $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x+1}, & x \leq 0, \\ x + a, & x > 0 \end{cases}$ неперервна в точці $x_0 = 0$.

6. Знайдіть усі значення параметра m , при яких функція $f(x) = \begin{cases} \frac{m}{x+2}, & x < -1, \\ 2x + 3, & x \geq -1 \end{cases}$ неперервна в точці $x_0 = -1$.

7. Знайдіть усі значення параметра a , при яких функція $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 1}{x + 1}, & x \neq -1, \\ a, & x = -1, \end{cases}$ неперервна в точці $x_0 = 1$.

8. Про неперервну на $\mathbb{R}$ функцію f відомо, що $f\left(\frac{2+n^2}{n^2+n}\right) = \frac{-n+2}{4n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Знайдіть значення $f(1)$.

9. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{2x+10}-4}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}$;

3) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$;

4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$.

10. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+8}-4}{\sqrt{2x-2}-\sqrt{2}}$.

11. Дослідіть функцію на неперервність та побудуйте її графік:

1) $f(x) = \begin{cases} 2x^2-1, & x \leq 1, \\ x-4, & x > 1; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0, \\ \frac{1}{2x}, & x < 0. \end{cases}$

12. Довизначте функцію $f(x)$ в точці $x=0$ так, щоб вона стала неперервною в цій точці:

1) $f(x) = \frac{3x^3-2x}{5x}$;

2) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}-1}$.

Рівень С

1. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^3-3x^2+4x-6}{7x^4-3x^3-5x+1}$;

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-3x+2}{2\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+7}}$.

2. Обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$.

3. Знайдіть усі значення параметра a , при яких функція $f(x) = \begin{cases} \frac{(a^2-1)|x|}{x}, & x \neq 0, \\ a^2+a, & x = 0, \end{cases}$

неперервна в точці $x_0 = 0$.

4. Знайдіть усі значення параметра a , при яких функція $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-a}, & x \neq 2, \\ a^2+3a, & x = 2, \end{cases}$ непе-

рервна в точці $x_0 = 2$.

5. Знайдіть усі значення параметра a , при яких функція $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-16}{x-a^2}, & x \neq 4, \\ a^2+2a, & x = 4, \end{cases}$ непе-

рервна в точці $x_0 = 4$.

6. Наведіть приклад функції, обмеженої на R і неперервної тільки в зліченому числі точок.

7. Творче завдання. Запрограмуйте алгоритм знаходження значень параметрів, при яких задана функція є неперервною в точці.

Рефлексія

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
.....
.....
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
.....
.....
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
.....
.....
- 4) Найскладнішим для мене було
.....
.....
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
.....
.....
- 6) Найбільше мені сподобалося
.....
.....

Можливі теми проєктів

- 1.** Вплив параметра на поведінку раціональної функції поблизу точки.
- 2.** Неперервність функції як умова узгодження моделей.
- 3.** Графічне дослідження неперервності функції з параметром.
- 4.** Параметр як засіб керування поведінкою функції в околі точки.
- 5.** Дослідження неперервності складених функцій з параметрами.







