11 Тема 1. Границя та неперервність функції

Урок 9. Урок–практикум. Обчислення границь неперервних функцій

Тип уроку: урок формування навичок і вмінь.

План уроку

1. Обчислення границь неперервних функцій.
2. Знаходження значень параметрів, при яких задана функція є неперервною в точці.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

визначає межі даних, формулює припущення щодо даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.3–1 П];

добирає додаткову інформацію з різних джерел і галузей знань [12 МАО 2.1.2–1 П];

визначає необхідність і достатність набору даних проблемної ситуації та математичних фактів для її розв'язання [12 МАО 3.1.1–2 П];

добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово впродовж викладення матеріалу.

2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.

3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.

4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.

5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.

6) Обов'язково пропонуйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Робота над обраним проєктом може тривати впродовж вивчення (повторення) усієї змістової теми. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності B або C. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня A, то для проєкту вони можуть обрати рівні B або C.

I. Організаційна частина (3–4 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чому для неперервних функцій границю в точці можна знаходити простою підстановкою?

2) Навіщо взагалі обчислювати границю, якщо можна знайти значення функції в точці?

3) Як пов'язані поняття неперервності та точності обчислень у фізиці й техніці?

4) Чи може існувати границя в точці, де функція не визначена? Чи може функція бути неперервною в такій точці?

5) Чи завжди неперервність функцій в точці гарантує існування границі функції в цій точці?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Обчисліть границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(4x^2-18x+6\right)$.

Відповідь. 6.

2. Обчисліть границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+x^2-8x}{x^2+4x}$.

Відповідь. –2.

3. Чи є неперервною функція $f(x)=\begin{cases}x^3+4, & x\le 2\\ 5x^2, & x>2\end{cases}$ в точці $x_0=2$?

Відповідь. Ні.

4. Знайдіть нулі функції $y=|x|+x$.

Відповідь. $\{x\mid x\le 0\}$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Електронний термометр працює у двох режимах обробки сигналу. При температурах нижче за певне значення використовується одна формула, а при вищих — інша. Щоб покази термометра не набували стрибкоподібного характеру, температура повинна змінюватися неперервно. Залежність виміряної температури T (у °C) від реальної температури x описується функцією

$$T(x)=\begin{cases}2x+m, x\le 5,\\ x^2-10x-m+30, x>5.\end{cases}$$

Знайдіть значення параметра m, якщо відомо, що функція $T(x)$ неперервна в точці $x=5$.

III. Обчислення границь неперервних функцій

Нагадаємо, що для того щоб обчислити границю неперервної функції в деякій точці x_0, достатньо просто підставити значення x_0 у вираз функції.

Основний принцип. Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і границя функції $f(x)$ у цій точці існує, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f\left(x_0\right)$.

Якщо в точці x_0 функція не неперервна, то можна знайти границю функції в точці x_0, якщо при безпосередній підстановці значення x_0 у функцію ми отримаємо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Часто потрібно просто скоротити множник $(x-x_0)$ який безпосередньо впливає на цю невизначеність і знайти границю непепервної в точці x_0 функції, яка співпадає з початковою функцією в усіх точках крім x_0.

Звичайно існують і інші методи обчислення границь при цій невизначеності. Ми розглянемо деякі з них на наступних уроках.

Ілюстративні приклади (10 хв)

5. Знайдіть $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}$.

Розв'язання. При безпосередній підстановці числа 1 у функцію $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}$ маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$. Щоб скоротити множник $(x-1)$ домножимо чисельник і знаменник на вираз $\left(\sqrt{3+x}+2\right)$ — спряжений до чисельника.

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{3+x}-2)(\sqrt{3+x}+2)}{(x-1)(\sqrt{3+x}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{3+x}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{3+x}+2}=\frac{1}{4}.$$

Функція $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3+x}+2}$ є неперервною в точці $x = 1$ і співпадає з функцією $f(x)=\dfrac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}$ в кожній точці крім $x = 1$.

Відповідь. $\dfrac{1}{4}$.

6. Обчисліть $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

Розв'язання. Оскільки $\lim\limits_{x\to 8}\left(\sqrt[3]{x}-2\right)=0$, то безпосередньо застосувати теорему про границю частки не можна, тому:

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to 8}\frac{(\sqrt{9+2x}-5)(\sqrt{9+2x}+5)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{4}\right)}{(\sqrt[3]{x}-2)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{4}\right)(\sqrt{9+2x}+5)}=$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{2(x-8)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{4}\right)}{(x-8)(\sqrt{2+9x}+5)}=\frac{12}{5}.$$

Відповідь. $\dfrac{12}{5}$.

7. Обчисліть $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3+x^2+x+1}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3+x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2(x+1)-(x+1)}{x^2(x+1)+(x+1)}=$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\left(x^2-1\right)}{(x+1)\left(x^2+1\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2+1}=\frac{(-1)^2-1}{(-1)^2+1}=\frac{0}{2}=0.$$

Відповідь. 0.

8. Обчисліть $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-2)\cdot(x-3)}{3x\cdot(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-2}{3x}=\dfrac{3-2}{3\cdot 3}=\dfrac{1}{9}$.

Відповідь. $\dfrac{1}{9}$.

9. Обчисліть $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{\sqrt{5x+1}-4}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{\sqrt{5x+1}-4}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+5)\cdot(x-3)(\sqrt{5x+1}+4)}{(\sqrt{5x+1}-4)\cdot(\sqrt{5x+1}+4)}=$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x+5)\cdot(x-3)(\sqrt{5x+1}+4)}{(\sqrt{5x+1})^2-4^2}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+5)\cdot(x-3)(\sqrt{5x+1}+4)}{5\cdot(x-3)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x+5)(\sqrt{5x+1}+4)}{5}=\frac{(3+5)(\sqrt{5\cdot 3+1}+4)}{5}=\frac{8\cdot 8}{5}=\frac{64}{5}.$$

Відповідь. $\dfrac{64}{5}$.

IV. Знаходження значень параметрів, при яких задана функція є неперервною в точці

Орієнтовний алгоритм для розв'язування вправ на знаходження значень параметрів, при яких функція є неперервною в точці

Якщо функція містить параметр (наприклад, a), то для того, щоб вона була неперервною в точці x_0, необхідно:

1. Знайти границю функції при $x \to x_0$.
2. Обчислити значення функції в точці x_0.
3. Прирівняти границю до значення функції та знайти такі значення параметра, при яких виконується рівність.

Ілюстративні приклади (10 хв)

10. Знайдіть усі значення параметра a, при яких функція $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-a^2}, x \neq 1, \\ a^2+a, x=1 \end{cases}$ неперервна в точці $x_0 = 1$.

Розв'язання. У випадку, коли $a^2 \neq 1$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$, і для того, щоб дана функція була неперервною в точці $x_0 = 1$, необхідно $f(1) = a^2 + a = 0$. Звідси $a = 0$ або $a = -1$. Оскільки при $a = -1$ $a^2 = 1$, то придатним значенням параметра тут є лише $a = 0$. Якщо $a^2 = 1$, то $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$. Тут значення a, які задовольняють умові, знайдемо з системи $\begin{cases} a^2 = 1, \\ a^2 + a = 2. \end{cases}$

Звідси $a = 1$.

Відповідь. 0; 1.

11. Знайдіть значення параметра p за яких функція $f(x) = \begin{cases} px^2 + 2, x \le 0, \\ 3x + p, x > 0 \end{cases}$ є неперервною в точці $x = 0$.

Розв'язання. $f(0) = p + 2$.

$\lim\limits_{x\to 0}(3x + p) = p + 2$, $p = p + 2$, $0 = 2$.

Отже, таких значень параметра p не існує.

Відповідь. Таких значень не існує.

12. Знайдіть значення параметра p за яких функція $f(x) = \begin{cases} px^2 + 2, x \le 0, \\ 3x + p, x > 0 \end{cases}$ є неперервною в точці $x = 1$.

Розв'язання. $f(1) = 9k$. $\lim\limits_{x\to 1}(3x - k) = 9k$, $3 - k = 9k$, $-10k = -3$. $k = -0{,}3$

Відповідь. $-0{,}3$.

V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Електронний термометр працює у двох режимах обробки сигналу. При температурах нижче за певне значення використовується одна формула, а при вищих — інша. Щоб покази термометра не набували стрибкоподібного характеру, температура повинна змінюватися неперервно. Залежність виміряної температури T (у °C) від реальної температури x описується функцією

$$T(x)=\begin{cases}2x+m, x\le 5,\\ x^2-10x-m+30, x>5.\end{cases}$$

Знайдіть значення параметра m, якщо відомо, що функція $T(x)$ неперервна в точці $x=5$.

Розв'язання. $T(5)=10+m$.

$\lim\limits_{x\to 5}\left(x^2-10x-m+30\right)=25-50-m+30=5-m$.

$10+m=5-m$, $2m=-5$, $m=-2{,}5$

Відповідь. $-2{,}5$.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: A, B, C (8–10 хв)

Рівень A

1. Обчисліть границі:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-5x+3\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+2x+1}{x-3}$;

3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+7x-1}{x^3+4x^2-2x+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^3-7x^2+5x-2}{4x^2+6x-8}$.

2. Обчисліть границі:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$;

2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x+1}$.

3. Обчисліть границі:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}}$;

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x-3}$.

4. Обчисліть границі:

1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sin\pi x}{x-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\pi x}{x+2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin\frac{\pi}{x}}{2x+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cos\frac{2\pi}{x}}{3x-1}$.

5. Обчисліть границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2-x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{x-3}$;

3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^2+x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x+5}{x^2+5x}$.

6. Обчисліть:

1) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} x$;

2) $\lim\limits_{x\to -1} \operatorname{arcctg} x$;

3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \cos x$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} \arccos x$.

Рівень В

1. Обчисліть границі:

1) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2-\sqrt{x}}{4-x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$.

2. Обчисліть границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^7+5x^5+4x^3}{x^7+2x^3}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{3}{1-x^3}+\dfrac{1}{x-1}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$.

3. Знайдіть усі значення параметра m, при яких функція $f(x)=\begin{cases} x^2+m,\ x\le 1,\\ 2x+m-1,\ x>1 \end{cases}$ неперервна в точці $x_0=1$.

4. Знайдіть усі значення параметра k, при яких функція $f(x)=\begin{cases} kx+4, x\le -1,\\ x^2+3, x>-1 \end{cases}$ неперервна в точці $x_0=-1$.

5. Знайдіть усі значення параметра a, при яких функція $f(x)=\begin{cases} a\sqrt{x+1}, x\le 0,\\ x+a, x>0 \end{cases}$ неперервна в точці $x_0=0$.

6. Знайдіть усі значення параметра m, при яких функція $f(x)=\begin{cases} \dfrac{m}{x+2}, x<-1,\\ 2x+3, x\ge -1 \end{cases}$ неперервна в точці $x_0=-1$.

7. Знайдіть усі значення параметра a, при яких функція $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+1}{x+1}, x\ne -1,\\ a, x=-1, \end{cases}$ неперервна в точці $x_0=1$.

8. Про неперервну на R функцію f відомо, що $f\left(\dfrac{2+n^2}{n^2+n}\right)=\dfrac{-n+2}{4n-1}$, $n\in\mathbb{N}$. Знайдіть значення $f(1)$.

9. Обчисліть границі:

1) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{2x+10}-4}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$.

10. Обчисліть границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+8}-4}{\sqrt{2x-2}-\sqrt{2}}$.

11. Дослідіть функцію на неперервність та побудуйте її графік:

1) $f(x)=\begin{cases}2x^2-1, x\le 1,\\ x-4, x>1;\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases}x^3, x\ge 0,\\ \dfrac{1}{2x}, x<0.\end{cases}$

12. Довизначте функцію $f(x)$ в точці $x=0$ так, щоб вона стала неперервною в цій точці:

1) $f(x)=\dfrac{3x^3-2x}{5x}$;

2) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$.

Рівень С

1. Обчисліть границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^3-3x^2+4x-6}{7x^4-3x^3-5x+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{2\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+7}}$.

2. Обчисліть границі:

1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$.

3. Знайдіть усі значення параметра a, при яких функція $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(a^2-1)|x|}{x}, & x\ne 0,\\ a^2+a, & x=0,\end{cases}$ неперервна в точці $x_0=0$.

4. Знайдіть усі значення параметра a, при яких функція $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-a}, & x\ne 2,\\ a^2+3a, & x=2,\end{cases}$ неперервна в точці $x_0=2$.

5. Знайдіть усі значення параметра a, при яких функція $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x-a^2}, & x\ne 4,\\ a^2+2a, & x=4,\end{cases}$ неперервна в точці $x_0=4$.

6. Наведіть приклад функції, обмеженої на R і неперервної тільки в зліченому числі точок.

7. ***Творче завдання.*** Запрограмуйте алгоритм знаходження значень параметрів, при яких задана функція є неперервною в точці.

VII. Рефлексія (2 хв)

1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що . . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що . . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію . . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

4) Найскладнішим для мене було . . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності . . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

6) Найбільше мені сподобалося . . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Можливі теми проєктів

1. Вплив параметра на поведінку раціональної функції поблизу точки.
2. Неперервність функції як умова узгодження моделей.
3. Графічне дослідження неперервності функції з параметром.
4. Параметр як засіб керування поведінкою функції в околі точки.
5. Дослідження неперервності складених функцій з параметрами.