

Урок 1. Приріст аргументу та приріст функції

Тип уроку: формування умінь і навичок.

План уроку

1. Поняття приросту аргументу та приросту функції.
2. Графічна ілюстрація приросту аргументу та приросту функції.
3. Практичне обчислення приростів аргументу та функції.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

виокремлює в конкретній специфічній проблемній ситуації її складові частини, які можуть бути розв'язані математичними методами [12 МАО 1.1.1–2 П];

оцінює достовірність і доцільність використання даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.2–1 П];

планує дії та організовує роботу групи, ураховуючи розподіл ролей та оцінюючи внесок кожного [12 МАО 2.2.3–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Перед початком вивчення теми запропонуйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Заохочуйте учнів/учениць наводити власні приклади із життя.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям розв'язати завдання на повторення на власний розсуд.
- 3) У рамках повторення усно запропонуйте учням пригадати основні властивості функцій.
- 4) Сформулюйте (без розв'язання) практичну задачу.
- 5) Теорію подавайте стисло. Зразки можливого подання теорії наводяться.
- 6) До кожного теоретичного твердження наведено ілюстративні приклади. Обирайте їх на свій розсуд.
- 7) Доведення тверджень виконуйте в межах доцільності.
- 8) Увесь запропонований практичний матеріал (у тому числі ілюстративні завдання) неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.

9) Заплануйте останні блоки уроку, а саме: розв'язування практичної задачі та тренувальні вправи як важливий компонент формування практичних навичок і навчання учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

I. Організаційна частина (3–4 хв)

Мотиваційні запитання

1) У IT-відділі компанії під час моніторингу серверної кімнати оператор помітив, що температура процесора за пів години піднялася з 55°C до 63°C . Це може свідчити про підвищене навантаження або несправність системи охолодження. Як можна визначити, наскільки швидко росте або падає температура і які дії потрібно запланувати, щоб уникнути перегріву обладнання?

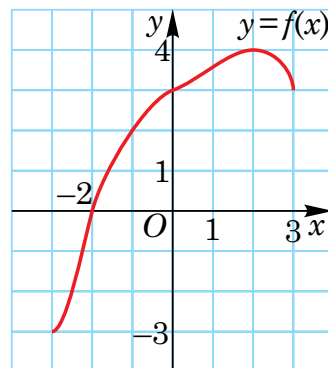
2) Аналітики маркетингового відділу відстежують активність на корпоративному сайті: о 9-й ранку сайт відвідали 120 користувачів, а вже опівдні — 450. Важливо зрозуміти, чи сервер впорається з подальшим потоком відвідувачів. Як можна підготувати серверну інфраструктуру до пікових навантажень?

3) Команда технічної підтримки перевіряє швидкість передачі даних: за перші 10 хвилин вдалося передати 500 мегабайт інформації, а за наступні 15 хвилин — ще 800 мегабайт. Це важливо для оцінки стабільності під час пікових навантажень. Як визначити середню швидкість передачі даних?

II. Повторення (3–4 хв)

1. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-3; 3]$. Укажіть нуль функції.

Відповідь. -2 .



2. Визначте точки перетину графіка функцій $y = 2x - 2$ з осями координат.

Відповідь. $(1; 0)$, $(0; -2)$.

3. Графік функції $y = \sqrt{2x^2 + x + 1}$ проходить через точку $(x_0; 4)$, де $x_0 > 0$. Обчисліть x_0 .

Відповідь. $2,5$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Студентка ІТ-коледжу розробляє застосунок, що відстежує кількість активних користувачів сервісу щогодини. Вона отримала набір даних за допомогою лічильника відвідувань. Кількість активних користувачів описується функцією:

$U(t) = 50 + 20t - 2t^2$, де $U(t)$ — кількість активних користувачів (осіб), t — кількість годин від початку спостереження.

1. Знайдіть приріст аргументу Δt та приріст функції ΔU на проміжку від 2 до 5 годин від початку спостереження.
2. Побудуйте графічну ілюстрацію: позначте точки $(2; U(2))$ і $(5; U(5))$, покажіть прирости на координатній площині.
3. Поясніть, як знайдений приріст допомагає в оцінці ефективності роботи сервісу.

III. Поняття приросту аргументу та приросту функції

Порівнюючи значення функцій $f(x)$ у деякій фіксованій точці x_0 із значеннями цієї функції в різних точках x , що лежать в околі x_0 , зручно виражати різницю $f(x) - f(x_0)$ через різницю $x - x_0$, користуючись поняттям «приріст аргументу» і «приріст функції». З'ясуємо їх зміст.

Нехай x — довільна точка, що лежить у деякому околі фіксованої точки x_0 .

Різниця $x - x_0$ називаються **приростом незалежної змінної** (або **приростом аргументу**) в точці x_0 і позначається Δx (читається «дельта ікс»).

Отже, $\Delta x = x - x_0$, звідки випливає, що $x = x_0 + \Delta x$.

Говорять також, що початкове значення аргументу x_0 отримало приріст Δx . Внаслідок цього значення функції $f(x)$ зміниться на величину:

$$f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Ця різниця називається приростом функції $f(x)$ у точці x_0 , що відповідає приросту аргументу Δx , і позначається символом Δf (читається «дельта еф»), тобто за означенням

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

звідки $f(x) = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f$.

Зверніть увагу на те, що при фіксованому x_0 приріст Δf є функцією від Δx .

Δf називають також приростом залежності змінної і позначають через Δu для функції $y = f(x)$.

Ілюстративні приклади (5–7 хв)

- 4.** Знайдіть прирости Δx і Δf у точці x_0 , якщо $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$ і $x = 1,9$.

Розв'язання. $\Delta x = x - x_0 = 1,9 - 2 = -0,1$,

$\Delta f = f(1,9) - f(2) = 3,61 - 4 = -0,39$.

Відповідь. $-0,1$; $-0,39$.

5. Знайдіть приріст Δf функції $f(x) = \frac{1}{x}$ в точці x_0 , якщо приріст аргументу дорівнює Δx .

Розв'язання. За формулою, $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, знаходимо:

$$\Delta f = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{x_0(x_0 + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}.$$

Відповідь. $-\frac{\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}.$

6. Дано куб з ребром a . Виразіть похибку ΔV , допущено в обчисленні об'єму цього куба, якщо при вимірюванні довжини ребра було допущено похибку Δx . Знайдіть значення похибки при $a = 3$ та $\Delta x = 0,2$.

Розв'язання. За означенням, маємо $x = a + \Delta x$, тоді

$$\Delta V = V(x) - V(a) = (a + \Delta x)^3 - a^3 = 3a^2\Delta x + 3a(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Підставимо $a = 3$, $\Delta x = 0,2$:

$$\Delta V = 3 \cdot 3^2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 3 \cdot 0,2^2 + 0,2^3 = 5,768.$$

Відповідь. 5,768.

IV. Графічна ілюстрація приросту аргументу та приросту функції

Означення. Пряма, яка проходить через будь-які дві точки (наприклад, точки M і N) графіка функції, називається **січною графіка функції** $y = f(x)$ (див. рисунок).

Отже, пряма MN — січна. Кутовий коефіцієнт прямої $y = kx + b$ дорівнює тангенсу кута, який ця пряма утворює з додатним напрямком осі Ox . Тобто $k = \operatorname{tg} \alpha$, де $\alpha = \angle MPx$.

Позначимо точку перетину перпендикулярів, проведених із точок M і N , через K . Оскільки $MK \parallel Ox$, то $\angle MPx = \angle NMK$, як кути при перетині паралельних прямих січною NP .

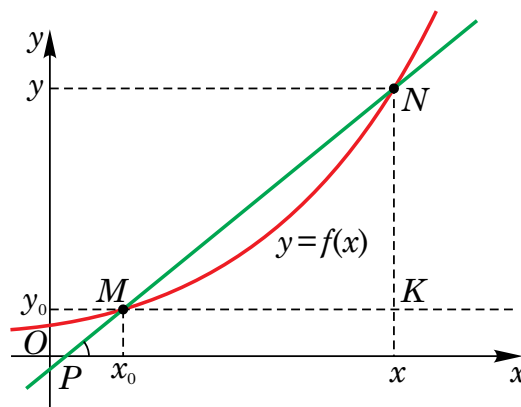
$$\text{Із прямокутного трикутника } NKM: \operatorname{tg} \angle NMK = \frac{NK}{MK}.$$

$$\text{Оскільки } NK = \Delta f = \Delta y, \quad MK = \Delta x, \quad \text{то } \operatorname{tg} \angle NMK = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

$$\text{Оскільки } \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \quad \text{то } \operatorname{tg} \angle NMK = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \angle MPx.$$

$$\text{Отже, } k = \operatorname{tg} \angle MPx = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Таким чином, кутовий коефіцієнт січної графіка функції $y = f(x)$ дорівнює відношенню приросту функції до приросту аргументу. У цьому полягає **геометричний зміст кутового коефіцієнта** січної.



Ілюстративні приклади

7. Обчисліть значення різницевого відношення для функції $h(x) = x^2$ на проміжку $[7; 9]$.

Розв'язання. Обчислимо за формулою: $\frac{h(9) - h(7)}{9 - 7} = \frac{9^2 - 7^2}{9 - 7} = \frac{81 - 49}{9 - 7} = \frac{32}{2} = 16$.

Значення різницевого відношення на проміжку $[7; 9]$ дорівнює 16.

Відповідь. 16.

8. Визначте значення різницевого відношення для функції $f(x)$ на проміжку $[2; 7]$ (див. рисунок).

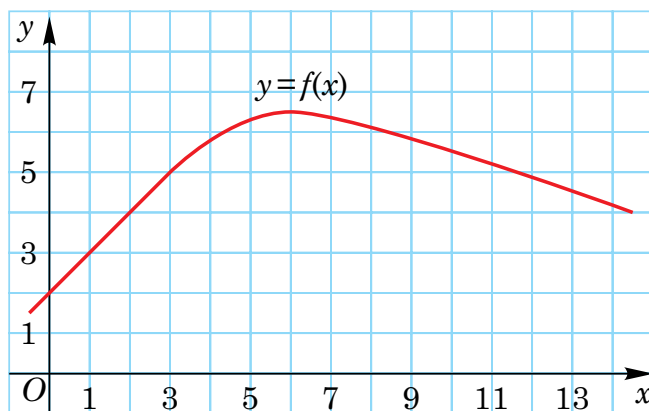
Розв'язання. За графіком функції визначимо, що $f(2) = 4$ і $f(7) = 6,5$.

Оскільки $x_0 = 2$, то $\Delta x = 7 - 2 = 5$.

Отже, обчислимо значення різницевого відношення:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{6,5 - 4}{5} = \frac{2,5}{5} = 0,5.$$

Відповідь. 0,5.



V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (8–10 хв)

Як я вирішую певну проблему?

- Задача.** Студентка ІТ-коледжу розробляє застосунок, що відстежує кількість активних користувачів сервісу щогодини. Вона отримала набір даних за допомогою лічильника відвідувань. Кількість активних користувачів описується функцією:

$U(t) = 50 + 20t - 2t^2$, де $U(t)$ — кількість активних користувачів (осіб), t — кількість годин від початку спостереження.

1. Знайдіть приріст аргументу Δt та приріст функції ΔU на проміжку від 2 до 5 годин від початку спостереження.
2. Побудуйте графічну ілюстрацію: позначте точки $(2; U(2))$ і $(5; U(5))$, покажіть прирости на координатній площині.
3. Поясніть, як знайдений приріст допомагає в оцінці ефективності роботи сервісу.

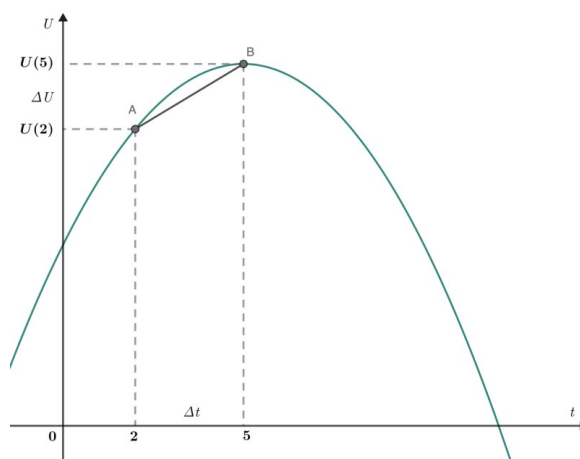
Розв'язання. Оскільки функція $y = U(t)$, де t — час (у годинах), задає кількість активних користувачів (осіб), то знайдемо $U(2) = 50 + 20 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2 = 82$ і $U(5) = 100$.

- 1) Знайдемо приріст аргументу $\Delta t = 5 - 2 = 3$.

Знайдемо приріст кількості користувачів сервісу $\Delta U = U(5) - U(2) = 100 - 82 = 18$.

Отже, $\Delta t = 3$, $\Delta U = 18$.

- 2) Побудуємо графік функції, де вісь абсцис — це час t (год), вісь ординат — кількість користувачів $U(t)$ (див. рисунок).



3) Знайдений приріст показує, як змінилась кількість активних користувачів від 2 до 5 годин від початку спостереження. Якщо $\Delta U > 0$, то кількість користувачів зросла.

Чим більший приріст за фіксований час, тим ефективніше працює сервіс. Студентка може оцінити, чи варто продовжувати кампанію, змінити її бюджет або тактику залучення користувачів.

Відповідь. $\Delta t = 3$, $\Delta U = 18$.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Знайдіть приріст функції $f(x)$ у точці x_0 , якщо:

1) $f(x) = 2x - 1$, $x_0 = -1$, $\Delta x = 0,2$; 2) $f(x) = 3x^2 - 2x$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0,1$;

3) $f(x) = \frac{6}{x}$, $x_0 = 1,2$, $\Delta x = -0,3$; 4) $f(x) = 4 - 3x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,3$;

5) $f(x) = 0,5x^2$, $x_0 = -2$, $\Delta x = 0,8$; 6) $f(x) = 2x^3 - 3$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,5$.

2. Знайдіть Δf , якщо:

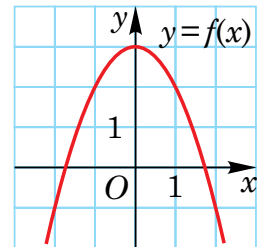
1) $f(x) = x^2 - 3x$, $x_0 = 3$, $x = 2,5$; 2) $f(x) = 2x - 5$, $x_0 = 3$, $x = 4$;

3) $f(x) = x^3 - x$, $x_0 = 1$, $x = 1,5$; 4) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 2$, $x = 2,2$.

3. Використовуючи графік функції (див. рисунок), визначте значенням різницевого відношення на даних проміжках I :

1) $I = [0; 2]$;

2) $I = [-2; -1]$.



4. Сторони прямокутника дорівнюють 15 м і 20 м. Знайдіть прирости його периметра і площі, якщо:

1) меншу його сторону збільшили на 0,11 м;

2) більшу його сторону збільшили на 0,2 м.

5. Знайдіть приріст функції $f(x)$ в точці x_0 , якщо:

1) $f(x) = -\frac{2}{x^2}$, $x_0 = -1$, $\Delta x = 0,1$; 2) $f(x) = 2x^2 - 3$, $x_0 = 3$, $\Delta x = -0,2$;

3) $f(x) = 3x + 1$, $x_0 = 3$, $\Delta x = 0,01$; 4) $f(x) = \frac{x^2}{2}$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0,1$.

6. Точка рухається по координатній прямій, при чому в будь-який момент часу t її координата дорівнює $x(t) = 3 + 12t - t^2$. На скільки і в якому напрямі переміститься точка за проміжок часу I :

1) $[2; 2,5]$;

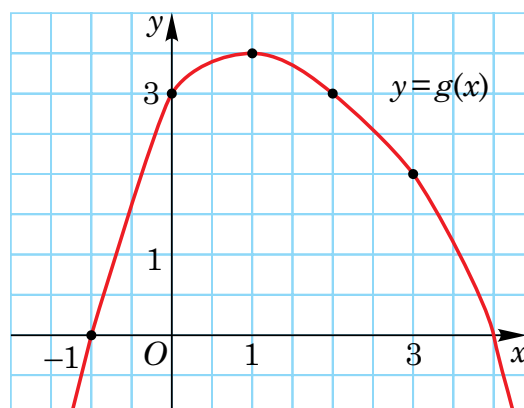
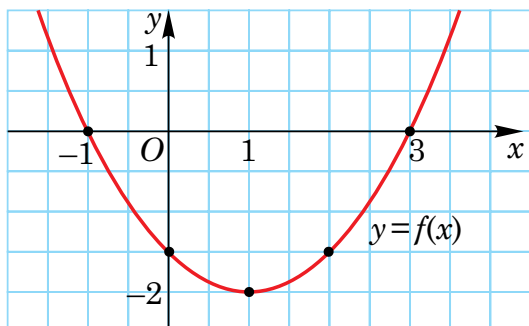
2) $[7; 8]$;

3) $[4; 5]$;

4) $[6; 8]$?

Рівень В

1. Дано графіки функцій $f(x)$ і $g(x)$ (див. рисунок).
Знайдіть значення різницевого відношення для даних функцій на інтервалах:
1) $[1; 3]$; 2) $[-1; 2]$; 3) $[0; 2]$; 4) $[-1; 1]$.



2. Знайдіть значення різницевого відношення для функцій $f(x)$ на інтервалах I :
- 1) $f(x) = x^2$, $I = [0; 2]$; 2) $f(x) = 2x^2 - 3$, $I = [2; 4]$;
 - 3) $f(x) = 3x^2$, $I = [-1; 3]$; 4) $f(x) = 0,5x^2 - 3$, $I = [-2; 1]$;
 - 5) $f(x) = 2x^3$, $I = [-1; 1]$; 6) $f(x) = \sqrt{x}$, $I = [4; 9]$;
 - 7) $f(x) = 3x^2 - 4$, $I = [1; 3]$; 8) $f(x) = \frac{2}{x}$, $I = [-1; -0,5]$.
3. Радіус круга дорівнює 2 см. Знайдіть похибку, допущену під час обчислення його площі, якщо похибка при вимірюванні довжини радіуса дорівнює:
- 1) 0,2 см; 2) 0,1 см; 3) ΔR ; 4) h .
4. Для дайвінгу застосовуються суворі правила спливання. У таблиці наведено дані про процес спливання, якого слід дотримуватись після занурення, під час якого дайвер провів 28 хвилин на глибині 39 метрів.
- 1) Визначте середню швидкість спливання протягом усього процесу підйому.
 - 2) Визначте середню швидкість спливання в першому та другому періодах підйому окремо.
 - 3) Визначте середню швидкість спливання протягом перших і останніх трьох хвилин.
- Примітка.* Орієнтуйтеся на таблицю, в якій зазначено глибини на певні моменти часу $\left(V = \frac{\Delta s}{\Delta t} \right)$.

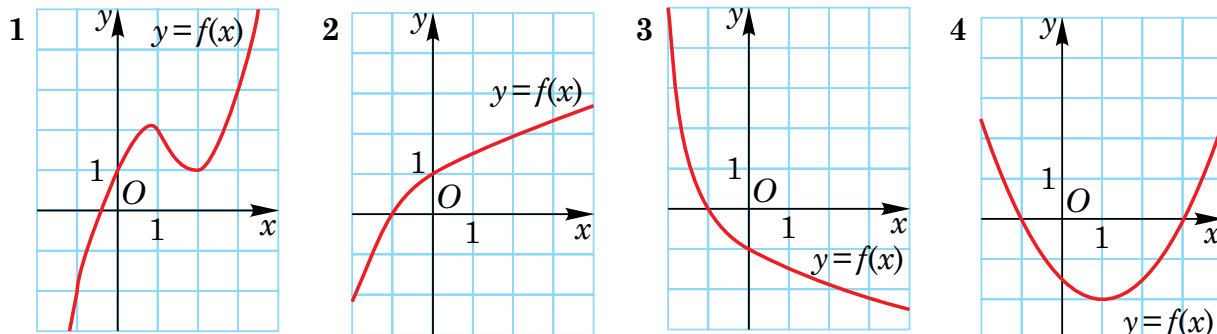
Час t (у хв)	0	3	7	7,5	15,5	17	33	34
Глибина (м)	39	9	9	6	6	3	3	0

5. Знайдіть приріст Δx і Δf в точці x_0 :
- 1) $f(x) = \cos^2 x$, $x_0 = \frac{2\pi}{3}$, $x = \frac{3\pi}{4}$; 2) $f(x) = 4x - x^2$, $x_0 = 2,5$, $x = 2,6$;
 - 3) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{3}$; 4) $f(x) = \sqrt{2x-1}$, $x_0 = 1,22$, $x = 1,345$.
6. Подайте приріст функції $f(x)$ у точці x_0 через x_0 і Δx :
- 1) $f(x) = 1 - 3x^2$; 2) $f(x) = 2x^2$; 3) $f(x) = ax + b$; 4) $f(x) = -\frac{1}{x}$.

Рівень С

1. Установіть відповідність між графіком функції (1 – 4) та значенням різницевого відношення (А – Г) приросту функції до приросту аргументу.

Графік функції



Значення різницевого відношення

А $\frac{0 - (-1,5)}{3 - 0} = 0,5$

Б $\frac{1 - 1}{2 - 0} = 0$

В $\frac{1,75 - 0}{2 - (-1)} = \frac{7}{12}$

Г $\frac{-1,5 - 0}{0 + 1,5} = -1$

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐

2. Подайте Δf і $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ через x_0 і Δx і перетворіть утворені вирази:

1) $f(x) = -x^3 + 3x$; 2) $f(x) = x^3 - 2x$; 3) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$; 4) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

3. Електронагрівач від початку роботи за час t виділив $Q(t) = t^2 + 2t$ одиниць теплової енергії, де $0 \leq t \leq T$. Знайдіть:

1) середню потужність нагрівача на проміжку часу від 0 до T (середня потужність нагрівача, який за проміжок часу t виділив Q одиниць теплової енергії, дорівнює $P = \frac{Q}{t}$);

2) кількість теплової енергії, яку виділив нагрівач за проміжок часу між t_0 і $t_0 + \Delta t$;

3) середню потужність нагрівача за проміжок часу між t_0 і $t_0 + \Delta t$.

4. Під час хімічної реакції з речовин А і В утворюється речовина С. Через час t ($0 \leq t \leq T$) від початку реакції кількість речовини С, що утворилася, дорівнює $f(t) = 4t - t^2$. Знайдіть:

1) середню швидкість хімічної реакції на проміжку часу від 0 до T (середня швидкість хімічної реакції за продуктом реакції, під час якої за час t утворилось M одиниць речовини, дорівнює $v_R = \frac{M}{t}$);

2) кількість речовини С, яка утворилася за проміжок часу між t_0 і $t_0 + \Delta t$.

3) середню швидкість хімічної реакції за проміжок часу між t_0 і $t_0 + \Delta t$.

5. Для функцій $f(x) = x^2 - x$ і точки x_0 знайдіть $\frac{\Delta f}{\Delta x}$.
6. Тіло рухається по координатній прямій від початку координат до точки $x = a$ під дією сили, яка виконувала при цьому роботу $A(x) = x^3$, де $x \in [0; a]$ — координата тіла. Знайдіть:
- 1) середню величину сили, яка діяла на тіло під час його руху від початку координат до точки $x = a$ (середня величина сили, яка виконувала роботу A , перемістивши тіло на відстань x , дорівнює $F = \frac{A}{x}$);
 - 2) виконану роботу під час руху тіла між точками x координатними x_0 та $x_0 + \Delta x$;
 - 3) середню величину сили, яка діяла на тіло під час його руху між точками x_0 та $x_0 + \Delta x$;
 - 4) величину сили, яка діяла на тіло тоді, коли воно мало координату x_0 .

VII. Рефлексія. «Плюс-Мінус-Цікавинка» (1–2 хв)

- (+) що було зрозумілим:
-
-
- (–) що залишилося незрозумілим:
-
-
- (?) що здивувало або зацікавило:
-
-

Можливі теми проєктів

1. Геометрична інтерпретація приростів функції.
2. Вивчення лінійного наближення функції через прирости.
3. Практичне застосування приростів у задачах оптимізації
4. Дослідження функції через прирости: знаходження проміжків монотонності.