

Урок 10. Урок – практикум. Застосування правил обчислення похідних

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) пригадаєте означення похідної та повторите правила знаходження похідних елементарних функцій;
- 2) застосуєте теореми про похідну суми, добутку та частки функцій;
- 3) знайдете похідні, використовуючи формули знаходження похідних суми, добутку та частки функцій;
- 4) застосуєте отримані знання та навички для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Обчисліть кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції $f(x) = 20 - 3x - x^2$ у точці з абсцисою $x_0 = -6$.
2. Знайдіть похідну функції $f(x) = 3x^2 + \frac{2}{x^2} + 4$.
3. Тіло рухається прямолінійно за законом $x(t) = t^2 + t + 3$, де $x(t)$ — координата точки (у метрах), t — час (у секундах). Визначте момент часу t (у секундах), у який швидкість точки дорівнюватиме 9 м/с.
4. Обчисліть значення похідної функції $y = -2x^3 + \frac{10}{x} - 14$ у точці $x_0 = 2$.
5. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = 10t^2$, де $x(t)$ — координата точки (у метрах), t — час (у секундах). За якою формулою визначається швидкість $v(t)$ руху цієї матеріальної точки в будь-який момент часу t ?

III. Застосування теореми про похідну суми функцій

Формула обчислення похідної суми функцій:

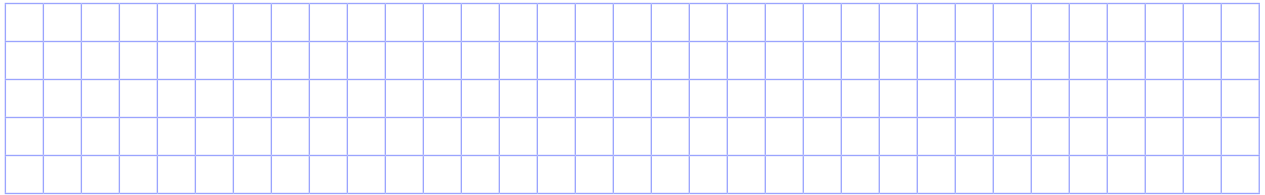
$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Це твердження можна узагальнити для будь-якої скінченної суми диференційовних функцій. Тоді теорема формується так.

Похідна суми скінченного числа функцій дорівнює сумі похідних цих функцій, якщо похідні цих функцій існують, тобто

$$(f(x) + g(x) + \dots + h(x))' = f'(x) + g'(x) + \dots + h'(x).$$

Приклад 1. Знайдіть похідну функції $y = \sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + 5$.



IV. Застосування теореми про похідну добутку функцій

Приклад 2. Знайдіть похідну функції $h(x) = \sqrt[3]{x} \sin x$.

Розв'язання. $h'(x) = (\sqrt[3]{x} \sin x)' = (\sqrt[3]{x})' \sin x + \sqrt[3]{x} (\sin x)' = \frac{\sin x}{3\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[3]{x} \cos x$.

Проте, помилково було б вважати, що отриманий результат є відповіддю до поставленої задачі.

Справа в тому, що обчисленні похідних спиратись на теорему про похідну добутку двох функцій можна лише тоді, коли обидві ці функції є диференційовними. У даному прикладі функція $f(x) = \sqrt[3]{x}$ не є диференційовною в точці $x_0 = 0$, а у всіх інших точках координатної прямої і функція $f(x) = \sqrt[3]{x}$ і функція $g(x) = \sin x$ є диференційовними. Це означає, що теорему про похідну добутку буде коректно застосовувати для обчислення похідної функції $h(x) = \sqrt[3]{x} \sin x$ для всіх $x \neq 0$. Застосувати цю ж теорему для обчислення похідної добутку функцій $y = \sqrt[3]{x}$ і $y = \sin x$ у точці $x_0 = 0$ неможливою. Проте, це не означає, що дана функція $h(x)$ не є диференційовна в точці $x_0 = 0$.

Маємо $\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{h(0 + \Delta x) - h(0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{x} \sin x}{\Delta x}$.

Тоді $h'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 0 \cdot 1 = 0$.

Таким чином, функція $h(x) = \sqrt[3]{x} \sin x$ є диференційовною в точці $x_0 = 0$ і $h'(0) = 0$.

Відповідь. $h'(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{3\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[3]{x} \cos x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

V. Застосування теореми про похідну частки функцій

Нагадаємо формулу обчислення похідної частки функцій:

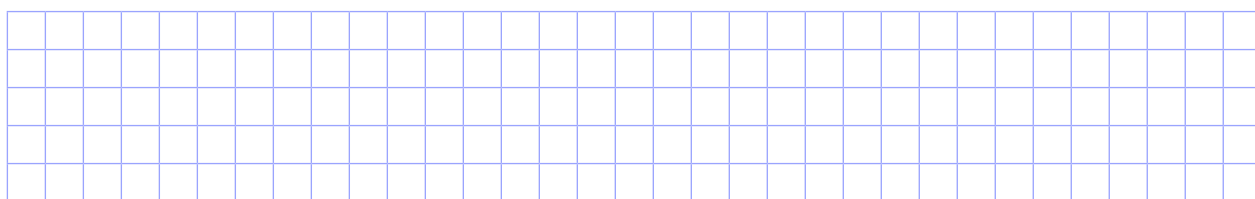
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Розглянемо окремий випадок частки функцій виду $y = \frac{C}{f(x)}$, де C — константа, а $f(x) \neq 0$ і в точці x функція $f(x)$ має похідну.

Скористаємось формулою обчислення похідної частки.

$$\text{Маємо } y' = \frac{f(x)C' - Cf'(x)}{(f(x))^2} = -\frac{Cf'(x)}{(f(x))^2}.$$

Приклад 3. Знайдіть похідну функції $y = \frac{2}{3x-2}$.



VI. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Коефіцієнт енергоефективності $E(t)$ показує співвідношення між отриманою корисною енергією (наприклад, теплом або холодом) та енергією, спожитою пристроєм (t вимірюється в годинах). Цей показник планують використовувати для оцінки ефективності роботи систем опалення, кондиціонування та промислових установок. Енергетична компанія проводить моніторинг нової теплової установки. Відомо, що кількість корисної теплової енергії визначається функцією $Q(t) = 800t - 25t^2 + 100$, а кількість спожитої електроенергії — функцією $W(t) = 300 + 40t$.

- 1) Запишіть загальний вираз для коефіцієнта енергоефективності $E(t)$.
- 2) Виведіть загальну формулу для похідної функції $E(t)$.
- 3) Знайдіть значення моменту часу, при яких швидкість зміни значення коефіцієнта $E(t)$ буде додатною та від'ємною. Поясніть як отримані результати описують роботу установки?

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Знайдіть похідну функції:

$$1) y = 2x^5 - x; \quad 2) y = x^7 - 4\sqrt{x}; \quad 3) y = \sin x + 2 \cos x; \quad 4) y = x - \frac{5}{x}.$$

2. Знайдіть похідну функції:

$$1) y = (x^3 - 2)(x^2 + 1); \quad 2) y = (x + 5)\sqrt{x}; \\ 3) y = x^4 \cos x; \quad 4) y = x \operatorname{tg} x.$$

3. Знайдіть похідну функції:

1) $y = \frac{2x-3}{4-5x}$; 2) $y = \frac{x}{x^2-1}$; 3) $y = \frac{5x^2-x-2}{x}$; 4) $y = \frac{x^3}{\cos x}$.

4. Обчисліть значення похідної функції $f(x)$ у точці x_0 :

1) $f(x) = \sqrt{x} - 16x, x_0 = \frac{1}{4}$; 2) $f(x) = x^{-2} - 4x^{-3}, x_0 = 2$;
3) $f(x) = \frac{\cos x}{1-x}, x_0 = 0$; 4) $f(x) = \frac{2x^2-3x-1}{x+1}, x_0 = 1$.

5. Розв'яжіть нерівність $f'(x) \leq 0$, якщо:

1) $f(x) = 3x^2 - x^3$; 2) $f(x) = x^4 + 2x^2$; 3) $f(x) = x^4 + 2x^2$; 4) $f(x) = x - \cos x$.

6. Знайдіть похідну функції:

1) $y = \frac{1}{x^9} - \frac{3}{x^3}$; 2) $y = \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^5}$; 3) $y = \frac{\cos x}{x-1}$; 4) $y = \sin x \cos x$.

7. Розв'яжіть нерівність $f'(x) > 0$, якщо:

1) $f(x) = \frac{2x}{1-x}$; 2) $f(x) = \frac{3-x^2}{x+2}$; 3) $f(x) = \frac{4}{x} + 2x$; 4) $f(x) = 2x - \cos x$.

8. Використовуючи правила і формули диференціювання, знайдіть похідну функції:

1) $y = 2x^5 - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x} + 3\sqrt{x}$; 2) $y = \frac{3}{x} + \sqrt[5]{x^2} - 4x^3 + \frac{2}{x^4}$;
3) $y = \frac{3}{\sqrt{x}} + 2\sqrt[3]{x^2} - \frac{x^2}{2} + 2\sqrt{2}$; 4) $y = 3\sqrt[6]{x} + \frac{4}{3x^9} + \frac{\sqrt{x}}{x} - \sqrt{x^6}$.

Рівень В

1. Шлях s (у метрах), пройдений тілом за час t (у секундах) після початку руху, визначається за формулою $s(x) = \frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + t$. Знайдіть швидкість і прискорення тіла в момент часу $t = 3$ с.

2. Ліфт після вмикання рухається за законом $x(t) = 2t^2 + 3t + 1$ (у метрах). Знайдіть швидкість його руху в момент часу $t = 1$ с.

3. Швидкість тіла, яке рухається прямолінійно, визначається за формулою $v(t) = 2t^2 + 4t$. Яке прискорення матиме тіло через 3 с після початку руху?

4. Знайдіть похідну функції:

1) $y = 12 - \operatorname{ctg} x$; 2) $y = 0,4x^{-5} + \sqrt{3}$; 3) $y = \frac{3-x^2}{4+2x}$; 4) $y = \frac{x^2-5x}{x-7}$.

5. Користуючись означенням похідної, знайдіть похідну функції:

1) $y = x^2 + 2x$; 2) $y = \frac{3}{x}$; 3) $y = 3x^3 - 6x + 5$; 4) $y = 5x + x^6 - \sin 2$.

6. Користуючись означенням похідної, знайдіть похідну функції:

1) $y = 2\sqrt{x} + x^3 + 0,2x^5$; 2) $y = 3x^{-3} + \sin x - \cos 2$.

7. Знайдіть похідну функції:

1) $y = 5 \operatorname{tg} x (\sin x + 2)$; 2) $y = \sqrt{x}(1 - \operatorname{ctg} x)$;
3) $y = (3x + \sqrt{x})(\cos x - 5)$; 4) $y = (4 - x)(\cos x - 5)$.

8. Розв'яжіть рівняння $f'(x) = g'(x)$, якщо:

1) $f(x) = 4 \cos x, g(x) = 2\sqrt{3}x + 9$; 2) $f(x) = 2 \sin x, g(x) = x + 11$.

Рівень С

- Розв'яжіть рівняння $f'(x) = 0$, якщо:
1) $f(x) = \operatorname{tg} x - 2x$; 2) $f(x) = 2x + \operatorname{ctg} x$.
- Розв'яжіть нерівність $g'(x) \geq 0$, якщо:
1) $g(x) = \cos x + 0,5x$; 2) $g(x) = \sin x - 0,5x$.
- Знайдіть координати точки перетину двох дотичних до графіка функції $g(x) = \frac{3x+1}{2x-1}$, якщо одна з них проведена в точці з абсцисою $x = -1$, а друга — в точці з абсцисою $x = 3$.
- Знайдіть координати точок перетину з осями координат дотичних до графіка функції $y(x) = \frac{2x-3}{x+3}$, кутовий коефіцієнт яких дорівнює 9.
- Знайдіть похідну функції $t(x) = \frac{2 \sin x}{3 - \cos x}$ у точці $x_0 = \frac{\pi}{3}$.
- Складіть і розв'яжіть рівняння $\frac{|f(x)|}{f'(x)} = -1$, якщо $f(x) = -x^2 - x - 1$.
- Знайдіть функцію $y = f(x)$, якщо:
1) $f'(x) = 2 \cos x$ і $f(\pi) = 3$; 2) $f'(x) = \sin x$ і $f(\pi) = 2$;
- При яких значеннях x правильна рівність $y' \cdot y + y^2 = 0$, якщо:
1) $y = 2 \sin x$; 2) $y = 3 \cos x$.

Рефлексія

Запропонуйте учням оцінити розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Жахливі									Чудові

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

-
.....
.....
-
.....
.....

Можливі теми проєктів

- Історія розвитку поняття похідної та внесок видатних математиків.
- Графічна інтерпретація похідної та її застосування для дослідження функцій.
- Застосування похідних у дослідженні реальних економічних моделей.
- Застосування похідних у техніці: оптимізація витрат і ресурсів.

