

Урок 10. Урок – практикум. Застосування правил обчислення похідних

Тип уроку: застосування знань, умінь і навичок.

План уроку

1. Застосування теореми про похідну суми функцій.
2. Застосування теореми про похідну добутку функцій.
3. Застосування теореми про похідну частки функцій.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

вирізняє специфічні проблемні ситуації, які можуть бути розв'язані математичними методами [12 МАО 1.1.1–1 П];

визначає типи можливих результатів розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 1.3.1–1 П];

пов'язує різні математичні знання і вміння, узагальнює їх, робить висновки [12 МАО 4.1.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.
- 6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівень В або рівень С.

10) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Команда розробників створює мобільний додаток для фітнесу. Програма підраховує загальну кількість «спалених» калорій під час тренування. Вона складається з двох частин: калорії, «спалені» під час бігу, — $f(t)$, та калорії, «спалені» під час силових вправ, — $g(t)$. Щоб швидко показувати користувачеві, з якою швидкістю змінюється загальна кількість «спалених» калорій у будь-який момент часу t , потрібно знайти похідну від суми цих двох функцій. Чи можемо ми знайти швидкість зміни загальної кількості «спалених» калорій, якщо знаємо швидкість зміни кожного виду активності окремо? Обґрунтуйте відповідь.

2) Аналітик даних аналізує ефективність рекламної кампанії сайту. Потрібно визначити, як швидко змінюється коефіцієнт конверсії у часі. Коефіцієнт конверсії $C(t)$ — це частка кількості покупок $f(t)$ і кількості відвідувань сайту $g(t)$. Щоб оптимізувати витрати на рекламу, потрібно зрозуміти, як швидко змінюється цей коефіцієнт. Яким правилом скористатися, щоб знайти похідну від частки двох функцій?

3) Команда розробляє стрімінговий сервіс. Менеджеру потрібно оцінити зміну загального обсягу трафіку, який споживають користувачі у певний момент часу. Загальний обсяг трафіку $T(t)$ — це добуток кількості активних глядачів $f(t)$ і середнього обсягу даних, що споживає один глядач за хвилину, $g(t)$. Отже, $T(t) = f(t) \cdot g(t)$. Необхідно спрогнозувати навантаження на сервери, щоб уникнути перебоїв. Як швидко змінюється загальний трафік?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Обчисліть кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції $f(x) = 20 - 3x - x^2$ у точці з абсцисою $x_0 = -6$.

Відповідь. 9.

2. Знайдіть похідну функції $f(x) = 3x^2 + \frac{2}{x^2} + 4$.

Відповідь. $6x - \frac{4}{x^3}$.

3. Тіло рухається прямолінійно за законом $x(t) = t^2 + t + 3$, де $x(t)$ — координата точки (у метрах), t — час (у секундах). Визначте момент часу t (у секундах), у який швидкість точки дорівнюватиме 9 м/с.

Відповідь. 4 с.

4. Обчисліть значення похідної функції $y = -2x^3 + \frac{10}{x} - 14$ у точці $x_0 = 2$.

Відповідь. $-26,5$.

5. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = 10t^2$, де $x(t)$ — координата точки (у метрах), t — час (у секундах). За якою формулою визначається швидкість $v(t)$ руху цієї матеріальної точки в будь-який момент часу t ?

Відповідь. $20t$.

Як я вирішую певну проблему?

- Задача.** Коефіцієнт енергоефективності $E(t)$ показує співвідношення між отриманою корисною енергією (наприклад, теплом або холодом) та енергією, спожитою пристроєм (t вимірюється в годинах). Цей показник планують використовувати для оцінки ефективності роботи систем опалення, кондиціонування та промислових установок. Енергетична компанія проводить моніторинг нової теплової установки. Відомо, що кількість корисної теплової енергії визначається функцією $Q(t) = 800t - 25t^2 + 100$, а кількість спожитої електроенергії — функцією $W(t) = 300 + 40t$.
- 1) Запишіть загальний вираз для коефіцієнта енергоефективності $E(t)$.
 - 2) Виведіть загальну формулу для похідної функції $E(t)$.
 - 3) Знайдіть значення моменту часу, при яких швидкість зміни значення коефіцієнта $E(t)$ буде додатною та від'ємною. Поясніть як отримані результати описують роботу установки?

III. Застосування теореми про похідну суми функцій

Формула обчислення похідної суми функцій:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Це твердження можна узагальнити для будь-якої скінченної суми диференційовних функцій. Тоді теорема формується так.

Похідна суми скінченного числа функцій дорівнює сумі похідних цих функцій, якщо похідні цих функцій існують, тобто

$$(f(x) + g(x) + \dots + h(x))' = f'(x) + g'(x) + \dots + h'(x).$$

Ілюстративний приклад

6. Знайдіть похідну функції $y = \sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + 5$.

Розв'язання. Скористаємось правилом обчислення похідної та відомими формулами похідних елементарних функцій:

$$y' = (\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + 5)' = (\sin x)' + (\cos x)' + (\operatorname{tg} x)' + 5' = \cos x - \sin x + \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Відповідь. $\cos x - \sin x + \frac{1}{\cos^2 x}$.

IV. Застосування теореми про похідну добутку функцій

Ілюстративний приклад

7. Знайдіть похідну функції $h(x) = \sqrt[3]{x} \sin x$.

Розв'язання. $h'(x) = (\sqrt[3]{x} \sin x)' = (\sqrt[3]{x})' \sin x + \sqrt[3]{x} (\sin x)' = \frac{\sin x}{3\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[3]{x} \cos x$.

Проте, помилково було б вважати, що отриманий результат є відповіддю до поставленої задачі.

Справа в тому, що обчислення похідних спиратись на теорему про похідну добутку двох функцій можна лише тоді, коли обидві ці функції є диференційовними. У даному прикладі функція $f(x) = \sqrt[3]{x}$ не є диференційовною в точці $x_0 = 0$, а у всіх інших точках координатної прямої і функція $f(x) = \sqrt[3]{x}$ і функція $g(x) = \sin x$ є диференційовними. Це означає, що теорему про похідну добутку буде коректно застосовувати для обчислення похідної функції $h(x) = \sqrt[3]{x} \sin x$ для всіх $x \neq 0$. Застосовувати цю ж теорему для обчислення похідної добутку функцій $y = \sqrt[3]{x}$ і $y = \sin x$ у точці $x_0 = 0$ неможливо. Проте, це не означає, що дана функція $h(x)$ не є диференційовна в точці $x_0 = 0$.

Маємо $\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{h(0 + \Delta x) - h(0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{x} \sin x}{\Delta x}$.

Тоді $h'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 0 \cdot 1 = 0$.

Таким чином, функція $h(x) = \sqrt[3]{x} \sin x$ є диференційовною в точці $x_0 = 0$ і $h'(0) = 0$.

Відповідь. $h'(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{3\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[3]{x} \cos x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

V. Застосування теореми про похідну частки функцій

Нагадаємо формулу обчислення похідної частки функцій:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Розглянемо окремий випадок частки функцій виду $y = \frac{C}{f(x)}$, де C — константа,

а $f(x) \neq 0$ і в точці x функція $f(x)$ має похідну.

Скористаємось формулою обчислення похідної частки.

Маємо $y' = \frac{f(x)C' - Cf'(x)}{(f(x))^2} = -\frac{Cf'(x)}{(f(x))^2}$.

Ілюстративний приклад

8. Знайдіть похідну функції $y = \frac{2}{3x - 2}$.

Розв'язання. Скористаємось формулою $y' = -\frac{Cf'(x)}{(f(x))^2}$.

$$\text{Тоді } y' = -\frac{2(3x-2)'}{(3x-2)^2} = -\frac{6}{(3x-2)^2}.$$

$$\text{Відповідь. } -\frac{6}{(3x-2)^2}.$$

VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (7–8 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Коефіцієнт енергоефективності $E(t)$ показує співвідношення між отриманою корисною енергією (наприклад, теплом або холодом) та енергією, спожитою пристроєм (t вимірюється в годинах). Цей показник планують використовувати для оцінки ефективності роботи систем опалення, кондиціонування та промислових установок. Енергетична компанія проводить моніторинг нової теплової установки. Відомо, що кількість корисної теплової енергії визначається функцією $Q(t) = 800t - 25t^2 + 100$, а кількість спожитої електроенергії — функцією $W(t) = 300 + 40t$.

- 1) Запишіть загальний вираз для коефіцієнта енергоефективності $E(t)$.
- 2) Виведіть загальну формулу для похідної функції $E(t)$.
- 3) Знайдіть значення моменту часу, при яких швидкість зміни значення коефіцієнта $E(t)$ буде додатною та від'ємною. Поясніть як отримані результати описують роботу установки?

Розв'язання. 1) Запишемо загальний вираз для коефіцієнта ефективності:

$$E(t) = \frac{800t - 25t^2 + 100}{300 + 40t}.$$

2) Обчислимо похідну функції $E(t)$. Для цього скористаємось правилом обчислення похідної частки функцій:

$$\begin{aligned} E'(t) &= \frac{(800t - 25t^2 + 100)'(300 + 40t) - (800t - 25t^2 + 100)(300 + 40t)'}{(300 + 40t)^2} = \\ &= \frac{(800 - 50t)(300 + 40t) - 40(800t - 25t^2 + 100)}{(300 + 40t)^2} = \frac{236000 - 15000t - 1000t^2}{(300 + 40t)^2}. \end{aligned}$$

3) Розв'яжемо нерівність $E'(t) > 0$: $\frac{236000 - 15000t - 1000t^2}{(300 + 40t)^2} > 0$.

Використаємо метод інтервалів: $\frac{236000 - 15000t - 1000t^2}{(300 + 40t)^2} = 0$,

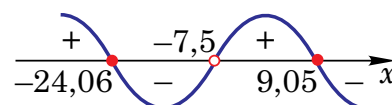
$$-1000t^2 - 15000t + 236000 = 0, \quad t^2 + 15t - 236 = 0,$$

$$D = 15^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-236) = 1096,$$

$$x_1 = \frac{-15 - \sqrt{1096}}{2} \approx -24,06, \quad x_2 = \frac{-15 + \sqrt{1096}}{2} \approx 9,05.$$

$$300 + 40t \neq 0,$$

$$t \neq -7,5.$$



Для $t < 9,6$ похідна набуває додатних значень, $E'(t) > 0$ — ефективність зростає.

Для $t > 9,6$ похідна набуває від'ємних значень, $E'(t) < 0$ — ефективність падає.

Якщо час роботи установки перевищує 9,6 годин, то її коефіцієнт енергоефективності починає зменшуватися. Щоб система працювала ефективно, потрібно мо-

ніторити її режим роботи та не допускати перерв в роботі. Інакше ефективність почне знижуватись.

Відповідь. $E(t) = \frac{800t - 25t^2 + 100}{300 + 40t}$, $E'(t) = \frac{236000 - 15000t - 1000t^2}{(300 + 40t)^2}$, $E'(t) > 0$ якщо $t < 9,05$ год.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Знайдіть похідну функції:

1) $y = 2x^5 - x$; 2) $y = x^7 - 4\sqrt{x}$; 3) $y = \sin x + 2 \cos x$; 4) $y = x - \frac{5}{x}$.

2. Знайдіть похідну функції:

1) $y = (x^3 - 2)(x^2 + 1)$; 2) $y = (x + 5)\sqrt{x}$;
3) $y = x^4 \cos x$; 4) $y = x \operatorname{tg} x$.

3. Знайдіть похідну функції:

1) $y = \frac{2x - 3}{4 - 5x}$; 2) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$; 3) $y = \frac{5x^2 - x - 2}{x}$; 4) $y = \frac{x^3}{\cos x}$.

4. Обчисліть значення похідної функції $f(x)$ у точці x_0 :

1) $f(x) = \sqrt{x} - 16x, x_0 = \frac{1}{4}$; 2) $f(x) = x^2 - 4x^3, x_0 = 2$;
3) $f(x) = \frac{\cos x}{1 - x}, x_0 = 0$; 4) $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 1}{x + 1}, x_0 = 1$.

5. Розв'яжіть нерівність $f'(x) \leq 0$, якщо:

1) $f(x) = 3x^2 - x^3$; 2) $f(x) = x^4 + 2x^2$; 3) $f(x) = x^4 + 2x^2$; 4) $f(x) = x - \cos x$.

6. Знайдіть похідну функції:

1) $y = \frac{1}{x^9} - \frac{3}{x^3}$; 2) $y = \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^5}$; 3) $y = \frac{\cos x}{x - 1}$; 4) $y = \sin x \cos x$.

7. Розв'яжіть нерівність $f'(x) > 0$, якщо:

1) $f(x) = \frac{2x}{1 - x}$; 2) $f(x) = \frac{3 - x^2}{x + 2}$; 3) $f(x) = \frac{4}{x} + 2x$; 4) $f(x) = 2x - \cos x$.

8. Використовуючи правила і формули диференціювання, знайдіть похідну функції:

1) $y = 2x^5 - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x} + 3\sqrt{x}$; 2) $y = \frac{3}{x} + \sqrt[5]{x^2} - 4x^3 + \frac{2}{x^4}$;
3) $y = \frac{3}{\sqrt{x}} + 2\sqrt[3]{x^2} - \frac{x^2}{2} + 2\sqrt{2}$; 4) $y = 3\sqrt[6]{x} + \frac{4}{3x^9} + \frac{\sqrt{x}}{x} - \sqrt{x^6}$.

Рівень В

1. Шлях s (у метрах), пройдений тілом за час t (у секундах) після початку руху, визначається за формулою $s(x) = \frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + t$. Знайдіть швидкість і прискорення тіла в момент часу $t = 3$ с.

2. Ліфт після вмикання рухається за законом $x(t) = 2t^2 + 3t + 1$ (у метрах). Знайдіть швидкість його руху в момент часу $t = 1$ с.

- 3.** Швидкість тіла, яке рухається прямолінійно, визначається за формулою $v(t) = 2t^2 + 4t$. Яке прискорення матиме тіло через 3 с після початку руху?
- 4.** Знайдіть похідну функції:
- 1) $y = 12 - \operatorname{ctg} x$; 2) $y = 0,4x^{-5} + \sqrt{3}$; 3) $y = \frac{3-x^2}{4+2x}$; 4) $y = \frac{x^2-5x}{x-7}$.
- 5.** Користуючись означенням похідної, знайдіть похідну функції:
- 1) $y = x^2 + 2x$; 2) $y = \frac{3}{x}$; 3) $y = 3x^3 - 6x + 5$; 4) $y = 5x + x^6 - \sin 2$.
- 6.** Користуючись означенням похідної, знайдіть похідну функції:
- 1) $y = 2\sqrt{x} + x^3 + 0,2x^5$; 2) $y = 3x^{-3} + \sin x - \cos 2$.
- 7.** Знайдіть похідну функції:
- 1) $y = 5 \operatorname{tg} x (\sin x + 2)$; 2) $y = \sqrt{x}(1 - \operatorname{ctg} x)$;
 3) $y = (3x + \sqrt{x})(\cos x - 5)$; 4) $y = (4 - x)(\cos x - 5)$.
- 8.** Розв'яжіть рівняння $f'(x) = g'(x)$, якщо:
- 1) $f(x) = 4 \cos x$, $g(x) = 2\sqrt{3}x + 9$; 2) $f(x) = 2 \sin x$, $g(x) = x + 11$.

Рівень С

- 1.** Розв'яжіть рівняння $f'(x) = 0$, якщо:
- 1) $f(x) = \operatorname{tg} x - 2x$; 2) $f(x) = 2x + \operatorname{ctg} x$.
- 2.** Розв'яжіть нерівність $g'(x) \geq 0$, якщо:
- 1) $g(x) = \cos x + 0,5x$; 2) $g(x) = \sin x - 0,5x$.
- 3.** Знайдіть координати точки перетину двох дотичних до графіка функції $g(x) = \frac{3x+1}{2x-1}$, якщо одна з них проведена в точці з абсцисою $x = -1$, а друга — в точці з абсцисою $x = 3$.
- 4.** Знайдіть координати точок перетину з осями координат дотичних до графіка функції $y(x) = \frac{2x-3}{x+3}$, кутовий коефіцієнт яких дорівнює 9.
- 5.** Знайдіть похідну функції $t(x) = \frac{2 \sin x}{3 - \cos x}$ у точці $x_0 = \frac{\pi}{3}$.
- 6.** Складіть і розв'яжіть рівняння $\frac{|f(x)|}{f'(x)} = -1$, якщо $f(x) = -x^2 - x - 1$.
- 7.** Знайдіть функцію $y = f(x)$, якщо:
- 1) $f'(x) = 2 \cos x$ і $f(\pi) = 3$; 2) $f'(x) = \sin x$ і $f(\pi) = 2$;
- 8.** При яких значеннях x правильна рівність $y' \cdot y + y^2 = 0$, якщо:
- 1) $y = 2 \sin x$; 2) $y = 3 \cos x$.

VIII. Рефлексія (1–2 хв)

Запропонуйте учням оцінити розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Жахливі									Чудові

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

- 1)
- 2)

Можливі теми проєктів

1. Історія розвитку поняття похідної та внесок видатних математиків.
2. Графічна інтерпретація похідної та її застосування для дослідження функцій.
3. Застосування похідних у дослідженні реальних економічних моделей.
4. Застосування похідних у техніці: оптимізація витрат і ресурсів.

Список використаної літератури

- 1) Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра: підручник для 11 кл. з поглибленим вивченням математики: у 2 ч.— Х. : Гімназія, 2011. — Ч. 1. — 256 с. : іл.
- 2) Бевз Г. П. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень : підручник для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. — Київ : Видавничий дім «Освіта», 2018. — 336 с.
- 3) Істер О. С. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підручник для 10-го класу закладів загальної середньої освіти / О. С. Істер, О. В. Єргіна. — Київ : Генеза, 2018. — 448 с. : іл.