

Урок 11. Похідна складеної функції. Обчислення похідних складених функцій

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) вивчите означення складеної функції;
- 2) ознайомитесь з теоремою про похідну складеної функції та її доведенням;
- 3) навчитесь обчислювати похідні складених функцій;
- 4) розв'яжете приклади на знаходження похідних складених функцій;
- 5) проаналізуєте типові помилки при обчисленні похідних складених функцій.

II. Повторення

1. Обчисліть значення похідної функції $f(x) = x(4 - x)$ у точці $x_0 = 5$.
2. Знайдіть похідну функції $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$.
3. Задано функцію $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2}, & x < -1, \\ -5x^3 - 4x, & x \geq -1. \end{cases}$ Обчисліть: $f(-2) + f'(2)$.
4. Знайдіть похідну функції $f(x) = 6\sqrt{x} - 8$.

III. Складена функція

Розглянемо пари функцій:

$$y = \sqrt{x} \text{ та } y = \sqrt{x^2 - 3x + 2};$$

$$y = \sin x \text{ та } y = \sin(x^2 - 2);$$

$$y = \cos x \text{ та } y = \cos \sqrt{x}.$$

При обчисленні значень функцій $y = \sqrt{x}$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, при деяких значеннях аргументу x із області визначення функцій, безпосередня підстановка значення x у формулу функції дає значення функції.

При обчисленні значень функцій $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$, $y = \sin(x^2 - 2)$, $y = \cos \sqrt{x}$ потрібно виконати декілька дій з їхніми аргументами.

Такі функції, в яких виконуються додаткові дії над аргументами при обчисленні їхніх значень, називаються **складеними функціями** і позначаються $h(x) = g(f(x))$.

Аргументи складених функцій називаються **внутрішніми функціями**, а остання дія, яка виконується при обчисленні значень складених функцій визначає **зовнішню функцію**.

Наприклад, для функції $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ функція $f(x) = x^2 - 3x + 2$ — внутрішня функція, а функція $y = \sqrt{f(x)}$ є зовнішньою функцією.

Складена функція може мати декілька внутрішніх функцій, наприклад, функція

$$y = \sin\left(\cos\left(\sqrt{2x - 3}\right)\right).$$

Внутрішні функції: $f(x) = 2x - 3$, $g(f(x)) = \sqrt{2x - 3}$, $h(g(f(x))) = \cos(\sqrt{2x - 3})$. Зовнішня функція: $y = \sin h(g(f(x)))$.

Областю визначення складеної функції є множина значень змінної x , яка задовольняє кожен із внутрішніх функцій, а також зовнішню функцію.

IV. Теорема про похідну складеної функції

Для формулювання та доведення теореми про обчислення похідної складеної функції розглянемо наступну лему.

Лема. Нехай функція $f(x)$ визначена на деякому проміжку, що містить точку x_0 . Функція $f(x)$ диференційована в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли існує така неперервна в точці x_0 функція φ , що для всіх $x \in D(f)$ виконується рівність $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\varphi(x)$. При цьому $f'(x_0) = \varphi(x_0)$.

Доведення. Нехай функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0 .

Тоді існує границя $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, яка дорівнює $f'(x_0)$.

$$\text{Розглянемо функцію } \varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0, \\ f'(x_0), & x = x_0. \end{cases}$$

Оскільки $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = f'(x_0) = \varphi(x_0)$, то функція φ — неперервна в точці x_0 .

Отже, для всіх $x \in D(f)$ виконується рівність $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\varphi(x)$.

Таким чином, доведено першу частину теореми.

Нехай тепер існує така неперервна в точці x_0 функція φ , що для всіх $x \in D(f)$ виконується рівність $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\varphi(x)$. Тоді для всіх $x \in D(f)$, $x \neq x_0$, можна записати

V. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. На екрані комп'ютера запускається заставка — коло, яке розширюється від точки в центрі екрана. Радіус кола збільшується рівномірно від 0 до 10 одиниць за 4 секунди. Необхідно визначити площу кола у будь-який момент часу та швидкість зміни цієї площі, щоб правильно синхронізувати зміну кольорів із швидкістю розширення.

- 1) Запишіть площу кола як функцію $S(t)$.
- 2) Знайдіть формулу зміни швидкості площі кола в будь-який момент часу.
- 3) Поясніть, чому важливо знати цю швидкість для синхронізації анімації.
- 4) Обчисліть швидкість зміни площі через 2 секунди після початку анімації.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Задайте за допомогою формул складені функції $y = f(g(x))$ і $y = g(f(x))$, якщо:

- 1) $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2 - 1$;
- 2) $f(x) = x^4$, $g(x) = 5x + 2$;
- 3) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{x}{x-1}$;
- 4) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

2. Знайдіть похідну функції:

- 1) $y = (2x + 3)^5$;
- 2) $y = \left(\frac{1}{3}x - 6\right)^{18}$;
- 3) $y = \cos 2x$;
- 4) $y = \sin^2 x$.

3. Знайдіть похідну функції:

- 1) $y = 2 \operatorname{ctg} \frac{x}{5}$;
- 2) $y = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$;
- 3) $y = \sqrt[3]{1 + x^2}$;
- 4) $y = \sqrt[5]{-1 - x - x^2}$.

4. Знайдіть похідну функції:

- 1) $y = \frac{1}{4x + 5}$;
- 2) $y = (6 - 7x)^{-4}$;
- 3) $y = \left(\frac{x^2}{2} + 4x - 1\right)^{-6}$;
- 4) $y = \sqrt{2 + \sin x}$.

5. Василь Заплутайко знаходить похідну функції $y = \sin 2x$ так:

- 1) робить заміну $2x = t$ і отримує функцію $y = \sin t$;
- 2) далі пише: $y' = (\sin t)' = \cos t$;
- 3) потім підставляє значення $2x = t$ і робить висновок, що $(\sin 2x)' = \cos 2x$.

У чому полягає помилка Василя?

6. Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $s(t) = (t + 2)^2(t + 5)$, де переміщення вимірюється в метрах, час — у секундах. Знайдіть її швидкість руху в момент часу $t_0 = 3$ с.

7. Дано функції $f(x) = 3 - 2x$, $g(x) = x^2$ і $p(x) = \sqrt{x}$. Задайте формулою складену функцію $h(x)$:

- 1) $h(x) = f(g(x))$;
- 2) $h(x) = g(p(x))$;
- 3) $h(x) = g(f(x))$;
- 4) $h(x) = p(f(x))$.

8. Знайдіть похідну функції:

- 1) $y = \sqrt{9 - x^2}$;
- 2) $y = \sqrt{\cos x}$;
- 3) $y = \frac{1}{(5x + 1)^3}$;
- 4) $y = \frac{1}{(6x - 1)^5}$.

Рівень В

1. Знайдіть похідну функції:

$$\begin{array}{lll} 1) y = (3x - 5)^6; & 2) y = \sin \frac{x}{3}; & 3) y = \cos^2 x; \\ 4) y = 2 \operatorname{tg} 4x; & 5) y = \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right); & 6) y = \sqrt{1 - x^2}. \end{array}$$

2. Тіло рухається за законом $s(t) = \sqrt{4t^2 - 6t + 11}$, де $s(t)$ — переміщення (у метрах), t — час (у секундах). Знайдіть швидкість руху тіла в момент часу $t_0 = 5$ с.

3. Знайдіть значення похідної функції $f(x) = \sqrt{10 - 3x}$ у точці $x_0 = -2$. (ЗНО, 2010 р.).

4. Обчисліть значення похідної функції в точці x_0 :

$$\begin{array}{ll} 1) y = (3x - 4)^7, x_0 = 2; & 2) y = (4 - 5x)^8, x_0 = 1; \\ 3) y = \sqrt{25 - 9x}, x_0 = 1; & 4) y = \sqrt{7x + 1}, x_0 = 5. \end{array}$$

5. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції $f(x)$ у точці з абсцисою x_0 :

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = \sqrt{25 - x^2}, x_0 = -3; & 2) f(x) = \sin 2x, x_0 = \frac{\pi}{4}; \\ 3) f(x) = \cos^2 x, x_0 = \frac{\pi}{12}; & 4) f(x) = \sqrt{4 - 3x}, x_0 = 0. \end{array}$$

6. Знайдіть похідну функції:

$$\begin{array}{ll} 1) y = \operatorname{tg} x \sin (2x + 5); & 2) y = (x + 1)^3 (x - 2)^4; \\ 3) y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}; & 4) y = x\sqrt{x^2 + 3}. \end{array}$$

7. Знайдіть похідну функції:

$$\begin{array}{ll} 1) y = \cos^3 2x; & 2) y = \sqrt{2 + \sin \left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{4} \right)}. \end{array}$$

8. Знайдіть похідну функції $f(x)$:

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)^{17}; & 2) f(x) = \sqrt{1 - x^4} + \frac{1}{x^2 + 3}; \\ 3) f(x) = \sqrt{4x^2 + 5}; & 4) f(x) = (3 - x^3)^5 + \sqrt{2x - 7}. \end{array}$$

Рівень С

1. Знайдіть $g'(x_0)$, якщо:

$$\begin{array}{ll} 1) g(x) = \sin 4x + \cos 2x, x_0 = \frac{\pi}{2}; & 2) g(x) = \cos 3x + \sin 6x, x_0 = \frac{\pi}{3}; \\ 3) g(x) = 2 \operatorname{tg} x - \sqrt{x^2 + 2x + 1}, x_0 = 0; & 4) g(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} - 4 \operatorname{tg} x, x_0 = 0. \end{array}$$

2. Знайдіть похідну функції:

$$\begin{array}{lll} 1) y = x \cdot \sqrt{2x + 1}; & 2) y = \sin x \cos 2x; & 3) y = \operatorname{tg} x \sin (2x + 5); \\ 4) y = \frac{\cos 3x}{x - 1}; & 5) y = \frac{\sqrt{x + 1}}{\sqrt{x} - 1}; & 6) y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}. \end{array}$$

3. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) f'(x) = 0, \text{ якщо } f(x) = \sin \left(4x - \frac{\pi}{6} \right); & 2) g'(x) = 0, \text{ якщо } g(x) = \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right). \end{array}$$

4. Обчисліть значення похідної функції в точці x_0 :

- 1) $y = (x + 2\sin x)^2$, $x_0 = \pi$; 2) $y = \sqrt{\frac{1 - \sin x}{\cos x}}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;
3) $y = \sqrt{\sin x \cos x}$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$; 4) $y = \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \cos x}\right)^3$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

5. Розв'яжіть нерівність $f'(x) > 0$, якщо:

- 1) $f(x) = 2\sin^2 x - \sqrt{2}x$; 2) $f(x) = \sin 2x - x\sqrt{3}$;
3) $f(x) = \cos 2x$; 4) $f(x) = 2x - \cos 4x$.

6. Обчисліть:

- 1) $f'(0)$, якщо $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{2x-1}}$; 2) $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$, якщо $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2}$.

7. Про функцію $f(x)$ відомо, що $f(1) = -1$, $f'(1) = 2$. Знайдіть $g'(1)$:

- 1) $g(x) = f(x^2)$; 2) $g(x) = f^3(x)$.

8. Знайдіть похідну функції $f(x) = \sqrt[3]{x^2} \operatorname{tg} x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Рефлексія

- 1) На уроці я дізнався/дізналася
.....
.....
- 2) Мені найбільше запам'яталося
.....
.....
- 3) Для мене було найцікавішим
.....
.....
- 4) Для мене було найскладнішим
.....
.....
- 5) Я припустився/припустилася помилки
.....
.....
- 6) Я хочу повторити, аби краще зрозуміти
.....
.....
- 7) Поради собі до наступного уроку
.....
.....

Можливі теми проєктів

1. Моделювання фізичних або біологічних процесів за допомогою складених функцій.
2. Складені функції в економіці.
3. Дослідження властивостей складених функцій (монотонність, парність, періодичність).
4. Графічна інтерпретація композицій функцій.
5. Створення симулятора складених функцій у Python/C ++.







