

Урок 11. Похідна складеної функції. Обчислення похідних складених функцій

Тип уроку: урок засвоєння нових знань.

План уроку

1. Складена функція.
2. Теорема про похідну складеної функції.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1–1 П];

оцінює обґрунтованість математичного розв'язання в контексті реальної комплексної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.3–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого. Завдання можна розв'язувати усно.
- 3) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні задачі. Обирайте ілюстративні задачі на власний розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.
- 6) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 7) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.
- 8) Можливі теми для створення проєктів запропоновані.

I. Організаційна частина (2–3 хв)

Мотиваційні запитання

1) Веб-розробник аналізує, як змінюється час завантаження сайту залежно від кількості запитів до сервера. Час завантаження L залежить від затримки мережі d , а затримка залежить від кількості активних користувачів u . Тоді функція, яка описує час завантаження має вигляді $L = f(d(u))$. Як знайти, з якою швидкістю змінюється час завантаження сайту, якщо зростає кількість користувачів?

2) Data Scientist налаштовує модель розпізнавання зображень. Як зміниться кількість помилок нейромережі E у залежності від часу навчання t ? Кількість помилок залежить від точності моделі p , а точність — від тривалості навчання, тобто $E = h(p(t))$. Як швидко змінюється кількість помилок під час збільшення часу навчання моделі?

3) Фахівець з кібербезпеки досліджує час зламу пароля. Час зламу залежить від кількості можливих комбінацій n , а кількість комбінацій — від довжини пароля l : $T = k(n(l))$. Як швидко зростає час зламу, якщо збільшити довжину пароля?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Обчисліть значення похідної функції $f(x) = x(4 - x)$ у точці $x_0 = 5$.

Відповідь. – 6.

2. Знайдіть похідну функції $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$.

Відповідь. $1 - \frac{2}{x^3}$.

3. Задано функцію $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2}, & x < -1, \\ -5x^3 - 4x, & x \geq -1. \end{cases}$ Обчисліть: $f(-2) + f'(2)$.

Відповідь. –61,75.

4. Знайдіть похідну функції $f(x) = 6\sqrt{x} - 8$.

Відповідь $\frac{3}{\sqrt{x}}$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. На екрані комп'ютера запускається заставка — коло, яке розширюється від точки в центрі екрана. Радіус кола збільшується рівномірно від 0 до 10 одиниць за 4 секунди. Необхідно визначити площу кола у будь-який момент часу та швидкість зміни цієї площі, щоб правильно синхронізувати зміну кольорів із швидкістю розширення.

1) Запишіть площу кола як функцію $S(t)$.

2) Знайдіть формулу зміни швидкості площі кола в будь-який момент часу.

3) Поясніть, чому важливо знати цю швидкість для синхронізації анімації.

4) Обчисліть швидкість зміни площі через 2 секунди після початку анімації.

III. Складена функція

Розглянемо пари функцій:

$$y = \sqrt{x} \text{ та } y = \sqrt{x^2 - 3x + 2};$$

$$y = \sin x \text{ та } y = \sin(x^2 - 2);$$

$$y = \cos x \text{ та } y = \cos \sqrt{x}.$$

При обчисленні значень функцій $y = \sqrt{x}$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, при деяких значеннях аргументу x із області визначення функцій, безпосередня підстановка значення x у формулу функції дає значення функції.

При обчисленні значень функцій $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$, $y = \sin(x^2 - 2)$, $y = \cos \sqrt{x}$ потрібно виконати декілька дій з їхніми аргументами.

Такі функції, в яких виконуються додаткові дії над аргументами при обчисленні їхніх значень, називаються **складеними функціями** і позначаються $h(x) = g(f(x))$.

Аргументи складених функцій називаються **внутрішніми функціями**, а остання дія, яка виконується при обчисленні значень складених функцій визначає **зовнішню функцію**.

Наприклад, для функції $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ функція $f(x) = x^2 - 3x + 2$ — внутрішня функція, а функція $y = \sqrt{f(x)}$ є зовнішньою функцією.

Складена функція може мати декілька внутрішніх функцій, наприклад, функція

$$y = \sin\left(\cos\left(\sqrt{2x-3}\right)\right).$$

Внутрішні функції: $f(x) = 2x - 3$, $g(f(x)) = \sqrt{2x-3}$, $h(g(f(x))) = \cos(\sqrt{2x-3})$. Зовнішня функція: $y = \sin h(g(f(x)))$.

Областю визначення складеної функції є множина значень змінної x , яка задовольняє кожному із внутрішніх функцій, а також зовнішню функцію.

IV. Теорема про похідну складеної функції

Для формулювання та доведення теореми про обчислення похідної складеної функції розглянемо наступну лему.

Лема. Нехай функція $f(x)$ визначена на деякому проміжку, що містить точку x_0 . Функція $f(x)$ диференційована в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли існує така неперервна в точці x_0 функція φ , що для всіх $x \in D(f)$ виконується рівність $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\varphi(x)$. При цьому $f'(x_0) = \varphi(x_0)$.

Доведення. Нехай функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0 .

Тоді існує границя $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, яка дорівнює $f'(x_0)$.

Розглянемо функцію $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0, \\ f'(x_0), & x = x_0. \end{cases}$

Оскільки $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = f'(x_0) = \varphi(x_0)$, то функція φ — неперервна в точці x_0 .

Отже, для всіх $x \in D(f)$ виконується рівність $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\varphi(x)$.

Таким чином, доведено першу частину теореми.

Нехай тепер існує така неперервна в точці x_0 функція φ , що для всіх $x \in D(f)$ виконується рівність $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\varphi(x)$. Тоді для всіх $x \in D(f)$, $x \neq x_0$, можна записати

$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Оскільки функція $\varphi(x)$ неперервна в точці x_0 , то існує границя

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Це означає, що функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0 і $\varphi(x_0) = f'(x_0)$.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ має похідну в точці x_0 , а функція $g(f(x))$ має похідну в точці $y_0 = f(x_0)$, то складена функція $h(x) = g(f(x))$ також має похідну в точці x_0 , таку, що $h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

Доведення. Доведемо, що складена функція $h(x) = f(g(x))$, де функція $t = g(x)$ диференційовна в точці x_0 , а функція $y = f(t)$ диференційовна в точці $t_0 = g(x_0)$, є диференційовною в точці x_0 , причому $h'(x_0) = f'(t_0) \cdot g'(x_0)$.

Оскільки функція $y = f(t)$ диференційовна в точці t_0 , то за лемою існує неперервна в точці t_0 функція $y = \varphi(t)$ така, що для всіх $t \in D(f)$ виконується рівність $f(t) - f(t_0) = (t - t_0)\varphi(t)$ і $\varphi(t_0) = f'(t_0)$.

Виконаємо підстановку $t = g(x)$, $t_0 = g(x_0)$ і отримаємо рівність $f(g(x)) - f(g(x_0)) = (g(x) - g(x_0))\varphi(g(x))$, яка виконується для всіх x з області визначення складеної функції $h(x) = f(g(x))$.

Оскільки функція $t = g(x)$ є диференційовною в точці x_0 , то за лемою існує неперервна в точці x_0 функція $t = \varphi_1(x)$ така, що для всіх $x \in D(g)$ виконується рівність

$$g(x) - g(x_0) = (x - x_0)\varphi_1(x) \text{ і } g'(x_0) = \varphi_1(x_0).$$

Тобто можемо записати $f(g(x)) - f(g(x_0)) = (x - x_0)\varphi_1(x)\varphi(g(x))$.

Функція $y = \varphi_1(x)\varphi(g(x))$ є неперервною в точці x_0 .

Тому за лемою складена функція $h(x) = f(g(x))$ є диференційовною в точці x_0 і $h'(x_0) = \varphi_1(x_0)\varphi(g(x_0)) = \varphi_1(x_0)\varphi(t_0) = g'(x_0)f'(t_0)$.

Таким чином, для обчислення похідної складеної функції треба знайти добуток похідної зовнішньої функції на похідні всіх внутрішніх функцій.

Наприклад, $y' = (\sin 2x)' = \cos 2x \cdot (2x)' = 2\cos 2x$.

Примітка. Якщо похідна від внутрішньої функції є числом, то це число доцільно записати множником перед функцією.

Ілюстративні приклади

5. Знайдіть похідну функції $y = (4x^2 - 5)^{10} - \sqrt{3x - 5}$.

Розв'язання. $y' = 10(4x^2 - 5)^9 \cdot (4x^2 - 5)' - \frac{(3x - 5)'}{2\sqrt{3x - 5}} = 10(4x^2 - 5)^9 \cdot 8x - \frac{3}{2\sqrt{3x - 5}} =$

$$= 80x \cdot (4x^2 - 5)^9 - \frac{3}{2\sqrt{3x - 5}}.$$

Відповідь. $80x \cdot (4x^2 - 5)^9 - \frac{3}{2\sqrt{3x - 5}}.$

6. Знайдіть значення похідної функції $h(x) = \sqrt[3]{x^2 \sin x}$ в точці $x_0 = 0$.

Розв'язання. Функція є складеною функцією $h(x) = f(g(x))$, де $f(t) = \sqrt[3]{t}$, $g(x) = x^2 \sin x$. Функція $g(x)$ — диференційовна в точці $x_0 = 0$, але функція $f(x)$ — недиференційовна в точці $t_0 = g(0) = 0$.

Отже, теорему для знаходження похідної складеної функції $h(x)$ у точці $x_0 = 0$ застосувати не можна.

Скориставшись означенням похідної $h'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x^2 \sin \Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}} = 1$.

Отже, незважаючи на недиференційовність функції $f(x)$ в точці $t_0 = 0$, похідна складеної функції в точці $x_0 = 0$ існує і дорівнює 1.

Відповідь. 1.

V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність

Як я вирішую певну проблему?

Задача. На екрані комп'ютера запускається заставка — коло, яке розширюється від точки в центрі екрана. Радіус кола збільшується рівномірно від 0 до 10 одиниць за 4 секунди. Необхідно визначити площу кола у будь-який момент часу та швидкість зміни цієї площі, щоб правильно синхронізувати зміну кольорів із швидкістю розширення.

- 1) Запишіть площу кола як функцію $S(t)$.
- 2) Знайдіть формулу зміни швидкості площі кола в будь-який момент часу.
- 3) Поясніть, чому важливо знати цю швидкість для синхронізації анімації.
- 4) Обчисліть швидкість зміни площі через 2 секунди після початку анімації.

Розв'язання. 1) Оскільки радіус кола збільшується на 10 одиниць за 4 секунди, то радіус збільшується у 2,5 разу кожену секунду. Запишемо функцію $r(t) = 2,5t$, де t — час (у секундах), r — радіус кола в момент часу t . Площу круга знайдемо за формулою $S = \pi r^2$.

Тоді $S(t) = \pi(2,5t)^2 = 6,25\pi t^2$.

2) Щоб знайти швидкість зміни площі кола у певний момент часу потрібно знайти похідну від функції площі: $S'(t) = 6,25 \cdot 2 \cdot \pi t \approx 39,25 \pi$ (кв. од.).

3) Швидкість зміни площі показує, як швидко збільшується видима частина кола. Знання цієї швидкості потрібно для правильної синхронізації зміни кольорів, щоб кольори плавно змінювались разом зі швидкістю зростання, плавності анімації, уникнення збоїв у графіці. Інакше зміна кольорів може виглядати неприродно — наприклад, кольори змінюватимуться швидко, коли коло різко розширюється, або навпаки.

4) Знайдемо швидкість зміни площі кола у момент часу $t = 2$ с.

$S'(1) = 39,25 \cdot 2 = 78,5$ (кв. од./с).

Отже, через 2 секунди після старту площа круга збільшується зі швидкістю приблизно 78,54 квадратних одиниць за секунду. Це досить швидко і програмі потрібно правильно врахувати, що швидкість росту площі збільшується з часом.

Відповідь. $6,25\pi t^2$, $39,25\pi$ кв. од., $78,5$ кв. од./с.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Задайте за допомогою формул складені функції $y = f(g(x))$ і $y = g(f(x))$, якщо:
1) $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2 - 1$; 2) $f(x) = x^4$, $g(x) = 5x + 2$;
3) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{x}{x-1}$; 4) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 2x^2 - 3x + 1$.
2. Знайдіть похідну функції:
1) $y = (2x + 3)^5$; 2) $y = \left(\frac{1}{3}x - 6\right)^{18}$; 3) $y = \cos 2x$; 4) $y = \sin^2 x$.
3. Знайдіть похідну функції:
1) $y = 2 \operatorname{ctg} \frac{x}{5}$; 2) $y = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$; 3) $y = \sqrt[3]{1 + x^2}$; 4) $y = \sqrt[5]{-1 - x - x^2}$.
4. Знайдіть похідну функції:
1) $y = \frac{1}{4x + 5}$; 2) $y = (6 - 7x)^{-4}$; 3) $y = \left(\frac{x^2}{2} + 4x - 1\right)^{-6}$; 4) $y = \sqrt{2 + \sin x}$.
5. Василь Заплутайко знаходить похідну функції $y = \sin 2x$ так:
1) робить заміну $2x = t$ і отримує функцію $y = \sin t$;
2) далі пише: $y' = (\sin t)' = \cos t$;
3) потім підставляє значення $2x = t$ і робить висновок, що $(\sin 2x)' = \cos 2x$.
У чому полягає помилка Василя?
6. Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $s(t) = (t + 2)^2(t + 5)$, де переміщення вимірюється в метрах, час — у секундах. Знайдіть її швидкість руху в момент часу $t_0 = 3$ с.
7. Дано функції $f(x) = 3 - 2x$, $g(x) = x^2$ і $p(x) = \sqrt{x}$. Задайте формулою складену функцію $h(x)$:
1) $h(x) = f(g(x))$; 2) $h(x) = g(p(x))$; 3) $h(x) = g(f(x))$; 4) $h(x) = p(f(x))$.
8. Знайдіть похідну функції:
1) $y = \sqrt{9 - x^2}$; 2) $y = \sqrt{\cos x}$; 3) $y = \frac{1}{(5x + 1)^3}$; 4) $y = \frac{1}{(6x - 1)^5}$.

Рівень В

1. Знайдіть похідну функції:
1) $y = (3x - 5)^6$; 2) $y = \sin \frac{x}{3}$; 3) $y = \cos^2 x$;
4) $y = 2 \operatorname{tg} 4x$; 5) $y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$; 6) $y = \sqrt{1 - x^2}$.
2. Тіло рухається за законом $s(t) = \sqrt{4t^2 - 6t + 11}$, де $s(t)$ — переміщення (у метрах), t — час (у секундах). Знайдіть швидкість руху тіла в момент часу $t_0 = 5$ с.
3. Знайдіть значення похідної функції $f(x) = \sqrt{10 - 3x}$ у точці $x_0 = -2$. (ЗНО, 2010 р.).

- 4.** Обчисліть значення похідної функції в точці x_0 :
- 1) $y = (3x - 4)^7, x_0 = 2$;
 - 2) $y = (4 - 5x)^8, x_0 = 1$;
 - 3) $y = \sqrt{25 - 9x}, x_0 = 1$;
 - 4) $y = \sqrt{7x + 1}, x_0 = 5$.
- 5.** Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції $f(x)$ у точці з абсцисою x_0 :
- 1) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}, x_0 = -3$;
 - 2) $f(x) = \sin 2x, x_0 = \frac{\pi}{4}$;
 - 3) $f(x) = \cos^2 x, x_0 = \frac{\pi}{12}$;
 - 4) $f(x) = \sqrt{4 - 3x}, x_0 = 0$.
- 6.** Знайдіть похідну функції:
- 1) $y = \operatorname{tg} x \sin (2x + 5)$;
 - 2) $y = (x + 1)^3 (x - 2)^4$;
 - 3) $y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$;
 - 4) $y = x\sqrt{x^2 + 3}$.
- 7.** Знайдіть похідну функції:
- 1) $y = \cos^3 2x$;
 - 2) $y = \sqrt{2 + \sin\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{4}\right)}$.
- 8.** Знайдіть похідну функції $f(x)$:
- 1) $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)^{17}$;
 - 2) $f(x) = \sqrt{1 - x^4} + \frac{1}{x^2 + 3}$;
 - 3) $f(x) = \sqrt{4x^2 + 5}$;
 - 4) $f(x) = (3 - x^3)^5 + \sqrt{2x - 7}$.

Рівень С

- 1.** Знайдіть $g'(x_0)$, якщо:
- 1) $g(x) = \sin 4x + \cos 2x, x_0 = \frac{\pi}{2}$;
 - 2) $g(x) = \cos 3x + \sin 6x, x_0 = \frac{\pi}{3}$;
 - 3) $g(x) = 2 \operatorname{tg} x - \sqrt{x^2 + 2x + 1}, x_0 = 0$;
 - 4) $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} - 4 \operatorname{tg} x, x_0 = 0$.
- 2.** Знайдіть похідну функції:
- 1) $y = x \cdot \sqrt{2x + 1}$;
 - 2) $y = \sin x \cos 2x$;
 - 3) $y = \operatorname{tg} x \sin (2x + 5)$;
 - 4) $y = \frac{\cos 3x}{x - 1}$;
 - 5) $y = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$;
 - 6) $y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$.
- 3.** Розв'яжіть рівняння:
- 1) $f'(x) = 0$, якщо $f(x) = \sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)$;
 - 2) $g'(x) = 0$, якщо $g(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.
- 4.** Обчисліть значення похідної функції в точці x_0 :
- 1) $y = (x + 2 \sin x)^2, x_0 = \pi$;
 - 2) $y = \sqrt{\frac{1 - \sin x}{\cos x}}, x_0 = \frac{\pi}{4}$;
 - 3) $y = \sqrt{\sin x \cos x}, x_0 = \frac{\pi}{6}$;
 - 4) $y = \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \cos x}\right)^3, x_0 = \frac{\pi}{4}$.
- 5.** Розв'яжіть нерівність $f'(x) > 0$, якщо:
- 1) $f(x) = 2 \sin^2 x - \sqrt{2x}$;
 - 2) $f(x) = \sin 2x - x\sqrt{3}$;
 - 3) $f(x) = \cos 2x$;
 - 4) $f(x) = 2x - \cos 4x$.

6. Обчисліть:

1) $f'(0)$, якщо $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{2x-1}}$;

2) $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$, якщо $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2}$.

7. Про функцію $f(x)$ відомо, що $f(1) = -1$, $f'(1) = 2$. Знайдіть $g'(1)$:

1) $g(x) = f(x^2)$;

2) $g(x) = f^3(x)$.

8. Знайдіть похідну функції $f(x) = \sqrt[3]{x^2} \operatorname{tg} x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

VII. Рефлексія (1–2 хв)

- 1) На уроці я дізнався/дізналася
- 2) Мені найбільше запам'яталося
- 3) Для мене було найцікавішим
- 4) Для мене було найскладнішим
- 5) Я припустився/припустилася помилки
- 6) Я хочу повторити, аби краще зрозуміти
- 7) Поради собі до наступного уроку

Можливі теми проєктів

1. Моделювання фізичних або біологічних процесів за допомогою складених функцій.
2. Складені функції в економіці.
3. Дослідження властивостей складених функцій (монотонність, парність, періодичність).
4. Графічна інтерпретація композицій функцій.
5. Створення симулятора складених функцій у Python/C ++.

Список використаної літератури

- 1) Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра: підручник для 11 кл. з поглибленим вивченням математики: у 2 ч.— Х. : Гімназія, 2011. — Ч. 1. — 256 с. : іл.
- 2) Колмогоров А. М., Абрамов О. М., Дудніцин Ю. П. та ін. Алгебра і початки аналізу: підручник для 10–11 класів середньої школи / За ред. А. М. Колмогорова. — К. : Освіта, 1994. — 350 с.