

Урок 12–13. Похідні обернених тригонометричних функцій

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) повторите основні обернені тригонометричні функції;
- 2) розглянете загальну формулу знаходження похідної оберненої функції;
- 3) вивчите похідні обернених тригонометричних функцій;
- 4) виконаєте завдання на знаходження похідних обернених тригонометричних функцій;
- 5) обговорите застосування нових знань у реальних задачах та в математичному моделюванні.

II. Повторення

1. Обчисліть:

1) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2};$

2) $\arccos^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$

3) $\arcsin\frac{1}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2};$

4) $\arcsin 1 \cdot \arcsin\frac{1}{2}.$

2. Обчисліть: $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right).$

3. Обчисліть: $\cos\left(2\arctg\left(-\frac{1}{3}\right)\right).$

4. Обчисліть: $\arctg\frac{1}{2} + \arctg\frac{1}{3}.$

5. Знайдіть функцію, обернену до функції $y = x^2$.

III. Поняття похідної оберненої функції

Теорема. Нехай оборотна функція $y = f(x)$ має в точці x_0 похідну, відмінну від нуля, а обернена до неї функція $x = g(y)$ є неперервною в точці y_0 , де $y_0 = f(x_0)$. Тоді функція $g(y)$ диференційовна в точці y_0 і $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Доведення. Нехай функція $y = f(x)$ є диференційовною в точці x_0 і $f'(x_0) \neq 0$. Доведемо, що коли функція $x = g(y)$, обернена до функції $y = f(x)$, є неперервною в точці $y_0 = f(x_0)$, то вона є диференційовною в цій точці.

Оскільки функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0 , то за відповідною лемою існує неперервна в точці x_0 функція $y = \varphi(x)$ така, що для всіх $x \in D(f)$ виконується рівність $f(x) - f(x_0) = (x - x_0) \varphi(x)$ і $\varphi(x_0) = f'(x_0) \neq 0$.

Зробивши підстановки $x = g(y)$, $x_0 = g(y_0)$, отримаємо рівність $f(g(y)) - f(g(y_0)) = (g(y) - g(y_0))\varphi(g(y))$, $y - y_0 = (g(y) - g(y_0))\varphi(g(y))$, яка виконується для всіх $y \in D(g)$.

Отже, $\varphi(g(y)) \neq 0$ при всіх $y \in D(g)$, де $y \neq y_0$. Крім цього, $\varphi(g(y_0)) = \varphi(x_0) = f'(x_0) \neq 0$. Тому $\varphi(g(y)) \neq 0$ для всіх $y \in D(g)$. Тоді рівність можна записати так:

$$g(y) - g(y_0) = \frac{1}{\varphi(g(y))}(y - y_0).$$

Функція $x = \frac{1}{\varphi(g(y))}$ є неперервною в точці y_0 . Тому, за лемою функція $x = g(y)$ є диференційовною в точці y_0 і

$$g'(y_0) = \frac{1}{\varphi(g(y_0))} = \frac{1}{\varphi(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Розглянемо неперервну і оборотну функцію $f(x)$, область визначення якої — деякий проміжок. Якщо функція $f(x)$ є диференційовною в точці x_0 , то до графіка цієї функції в точці $(x_0; y_0)$, де $y_0 = f(x_0)$, можна провести дотичну. Нехай ця дотична не є горизонтальною прямою, тобто $f'(x_0) \neq 0$.

Позначимо через $g(x)$, функцію, обернену до $f(x)$. Відомо, що графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$. Вони є рівними фігурами, а отже, мають багато однакових геометричних властивостей.

Має місце твердження: якщо неперервна і оборотна функція $f(x)$ визначена на деякому проміжку і графік функції $f(x)$ має негоризонтальну дотичну в точці $(x_0; y_0)$, то графік оберненої функції $g(x)$ в точці $(y_0; x_0)$ має невертикальну дотичну. Це означає, що обернена функція $g(x)$ є диференційовною в точці y_0 .

Приклад 1. За теоремою про похідну оберненої функції, знайдіть похідну функції

$$g(x) = \frac{x+2}{x}.$$

Розв'язання. Оберненою функцією до заданої, є $f(x) = \frac{2}{x-1}$. Таким чином

$$f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2} \text{ і } f'(g(x)) = -\frac{2}{(g(x)-1)^2} = -\frac{2}{\left(\frac{x+2}{x}-1\right)^2} = -\frac{x^2}{2}.$$

$$\text{Отже, } g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = -\frac{2}{x^2}.$$

$$\text{Відповідь. } -\frac{2}{x^2}.$$

Примітка. Знайдіть похідну функції $g(x)$ за правилом обчислення похідної частки й порівняйте результати.

IV. Похідні обернених тригонометричних функцій

Розглянемо функцію $y = \arcsin x$, $-1 \leq x \leq 1$ (див. рисунок).

Оскільки на інтервалі $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функція $x = \sin y$ зростає і похідна $x'_y = (\sin y)'_y = \cos y > 0$, то всі умови доведеної вище теореми виконуються.

$$\text{Тоді } (\arcsin x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y}.$$

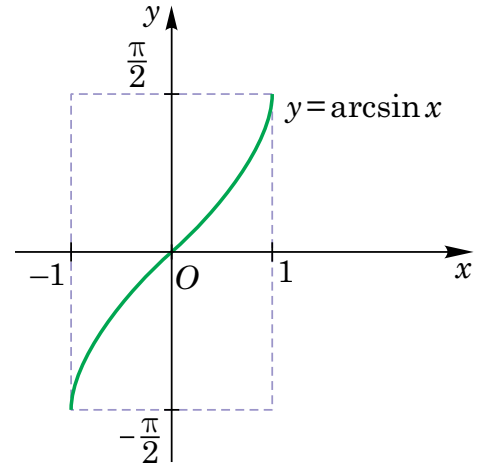
Оскільки на інтервалі $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos y > 0$, то з рівності $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ знаходимо $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$, $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$.

$$\text{Таким чином, } (\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Відомо, що $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$. Оскільки функція $y = \arcsin x$ не є диференційовною в точках -1 і 1 , то функція $y = \arccos x$ також не є диференційовною в точках -1 і 1 . Для будь-якого $x \in (-1; 1)$ можна записати:

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Міркуючи аналогічно, можна самостійно довести диференційованість функцій $y = \arctg x$ і $y = \text{arcctg } x$.



Похідні обернених тригонометричних функцій

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$(\arctg x)' = \frac{1}{1 + x^2},$$

$$(\text{arcctg } x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

[illegible][illegible][illegible]

Рівень А

- $$f'(x) = (\arcsin x + \arccos x)' = (\arcsin x)' + (\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

$$\begin{array}{ll} 1) y = \arcsin x + \operatorname{arctg} x; & 2) y = \arccos(2x) + \arcsin x; \\ 3) y = \operatorname{arctg} x^2 + \arccos x; & 4) y = \operatorname{arctg} x + \arcsin 3x. \end{array}$$

Рівень В

1. Знайдіть похідну функції:
1) $y = x \cdot \arcsin x$; 2) $y = x^2 \cdot \operatorname{arctg} x$; 3) $y = \sqrt{x} \arccos x$; 4) $y = x^{10} \cdot \arcsin (2x)$.
2. Кут підйому ракети описується функцією $\alpha(t) = \arcsin (0,1t)$. Знайдіть швидкість зміни кута в момент $t = 2$ с.
3. Платформа повертається під кутом $\alpha(t) = \arccos (1 - 0,2t)$. Знайдіть $\alpha'(t)$ при $t = 1$ с.
4. Напрямок руху описується $h(t) = \operatorname{arctg} (3t^2)$. Знайдіть кутову швидкість при $t = 1$ с.
5. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції у заданій точці:
1) $y = \arcsin x, x_0 = 0,5$; 2) $y = \arccos (2x), x_0 = 0$;
3) $y = \operatorname{arctg} (x^2), x_0 = 1$; 4) $y = x \cdot \arcsin x, x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
6. Знайдіть значення x , при якому похідна набуває заданого значення:
1) $(\arcsin x)' = \frac{2}{\sqrt{3}}$; 2) $(\operatorname{arctg} (2x))' = \frac{1}{2}$.

Рівень С

1. Побудуйте графік функції $f(x)$ та дотичну до графіка в точці x_0 :
1) $f(x) = \arcsin x, x_0 = 1$; 2) $f(x) = \arccos x, x_0 = 0,5$.
2. Обчисліть похідну функції:
1) $y = \arcsin \left(\frac{3x}{5} \right)$; 2) $y = \arccos \left(\sqrt{1 - x^2} \right)$;
3) $y = \operatorname{arctg} (2x^2 + 1)$; 4) $y = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x} \right)$.
3. Розв'яжіть рівняння $f'(x) = 0$, якщо:
1) $f(x) = x \cdot \arccos x$; 2) $f(x) = \operatorname{arctg} x^3$;
3) $f(x) = \arccos x^2$; 4) $f(x) = \arcsin (2x^2 - 1)$.
4. Обчисліть похідну функції:
1) $y = \arcsin \left(\frac{x}{1 + x^2} \right)$; 2) $y = \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \right)$;
3) $y = \arccos \left(\frac{x}{2} \right)$; 4) $y = \arccos (\cos x)$.
5. Обчисліть похідну функції:
1) $y = \operatorname{arctg} (4x^3 + x)$; 2) $y = \operatorname{arctg} \left(\sqrt{1 - x^2} \right)$;
3) $y = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x} \right)$; 4) $y = \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{x - 1} \right)$.
6. Обчисліть похідну функції:
1) $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2}$; 2) $y = x^2 \cdot \arcsin (x^3)$; 3) $y = \frac{x \cdot \arccos x}{\sqrt{1 - x^2}}$; 4) $y = \frac{\arcsin x}{x}$.

7. Обчисліть похідну функції:

1) $y = \arcsin x^2 + \arccos x^3$;

2) $y = \operatorname{arctg} x^2 - \operatorname{arctg} x^2$;

3) $y = x \cdot (\arcsin x + \arccos x)$;

4) $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{\arcsin x}$.

Рефлексія

1) Я сьогодні навчився/навчилась

2) Мені здалося цікавим

3) У мене залишилися запитання щодо

Можливі теми проєктів

1. Використання обернених тригонометричних функцій в інженерії.
2. Графіки обернених тригонометричних функцій та дотичних до них.
3. Використання обернених тригонометричних функцій у фізиці.
4. Історія виникнення аркфункцій і їхніх похідних.







