

Урок 12–13. Похідні обернених тригонометричних функцій

Тип уроку: урок засвоєння нових знань.

План уроку

1. Похідна функції арксинус.
2. Похідна функції арккосинус.
3. Похідні функцій арктангенс та арккотангенс.
4. Обчислення похідних обернених тригонометричних функцій.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

визначає межі даних, формулює припущення щодо даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.3–1 П];

сприймає інформацію математичного змісту в декількох формах [12 МАО 2.1.1–1 П];

планує дії та організовує роботу групи, ураховуючи розподіл ролей та оцінюючи внесок кожного [12 МАО 2.2.3–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Урок розрахований на дві академічні години. Перший урок ви можете спрямувати на вивчення теорії й аналіз ілюстративних прикладів. Другий урок — на розв'язування тренувальних вправ.
- 2) Даний урок можна провести і за одну академічну годину, якщо ви вважаєте за потрібне.
- 3) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 4) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 5) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці.
- 6) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

7) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівень В або рівень С.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Натяг тросів вантового мосту залежить від кута, під яким троси прикріплені до платформи. Інженери змінюють положення троса, щоб зменшити вібрації мосту під навантаженням. Як оцінити вплив кута натягу тросів на зміну їхньої довжини або на натяг тросів?

2) Щоб дрон утримував стабільність при поривах вітру, програма має постійно обчислювати кут відхилення дрону від вертикалі та швидкість зміни цього кута — щоб вчасно скоригувати положення пропелерів. Як обчислити, наскільки швидко змінюється цей кут?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Обчисліть:

1) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\arccos^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

3) $\arcsin\frac{1}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\arcsin 1 \cdot \arcsin\frac{1}{2}$.

Відповідь. 1) π ; 2) $\frac{25\pi^2}{36}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi^2}{12}$.

2. Обчисліть: $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$.

Відповідь. $\frac{4}{5}$.

3. Обчисліть: $\cos\left(2\arctg\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

Відповідь. $\frac{4}{5}$.

4. Обчисліть: $\arctg\frac{1}{2} + \arctg\frac{1}{3}$.

Відповідь. $\frac{\pi}{4}$.

5. Знайдіть функцію, обернену до функції $y = x^2$.

Відповідь. $\sqrt{x}$, при $x \geq 0$.

III. Поняття похідної оберненої функції

Теорема. Нехай оборотна функція $y = f(x)$ має в точці x_0 похідну, відмінну від нуля, а обернена до неї функція $x = g(y)$ є неперервною в точці y_0 , де $y_0 = f(x_0)$. Тоді функція $g(y)$ диференційовна в точці y_0 і $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Доведення. Нехай функція $y = f(x)$ є диференційовною в точці x_0 і $f'(x_0) \neq 0$. Доведемо, що коли функція $x = g(y)$, обернена до функції $y = f(x)$, є неперервною в точці $y_0 = f(x_0)$, то вона є диференційовною в цій точці.

Оскільки функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0 , то за відповідною лемою існує неперервна в точці x_0 функція $y = \varphi(x)$ така, що для всіх $x \in D(f)$ виконується рівність $f(x) - f(x_0) = (x - x_0) \varphi(x)$ і $\varphi(x_0) = f'(x_0) \neq 0$.

Зробивши підстановки $x = g(y)$, $x_0 = g(y_0)$, отримаємо рівність $f(g(y)) - f(g(y_0)) = (g(y) - g(y_0))\varphi(g(y))$, $y - y_0 = (g(y) - g(y_0))\varphi(g(y))$, яка виконується для всіх $y \in D(g)$.

Отже, $\varphi(g(y)) \neq 0$ при всіх $y \in D(g)$, де $y \neq y_0$. Крім цього, $\varphi(g(y_0)) = \varphi(x_0) = f'(x_0) \neq 0$. Тому $\varphi(g(y)) \neq 0$ для всіх $y \in D(g)$. Тоді рівність можна записати так:

$$g(y) - g(y_0) = \frac{1}{\varphi(g(y))}(y - y_0).$$

Функція $x = \frac{1}{\varphi(g(y))}$ є неперервною в точці y_0 . Тому, за лемою функція $x = g(y)$ є диференційовною в точці y_0 і

$$g'(y_0) = \frac{1}{\varphi(g(y_0))} = \frac{1}{\varphi(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Розглянемо неперервну і оборотну функцію $f(x)$, область визначення якої — деякий проміжок. Якщо функція $f(x)$ є диференційовною в точці x_0 , то до графіка цієї функції в точці $(x_0; y_0)$, де $y_0 = f(x_0)$, можна провести дотичну. Нехай ця дотична не є горизонтальною прямою, тобто $f'(x_0) \neq 0$.

Позначимо через $g(x)$, функцію, обернену до $f(x)$. Відомо, що графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$. Вони є рівними фігурами, а отже, мають багато однакових геометричних властивостей.

Має місце твердження: якщо неперервна і оборотна функція $f(x)$ визначена на деякому проміжку і графік функції $f(x)$ має негоризонтальну дотичну в точці $(x_0; y_0)$, то графік оберненої функції $g(x)$ в точці $(y_0; x_0)$ має невертикальну дотичну. Це означає, що обернена функція $g(x)$ є диференційовною в точці y_0 .

Ілюстративний приклад

6. За теоремою про похідну оберненої функції, знайдіть похідну функції $g(x) = \frac{x+2}{x}$.

Розв'язання. Оберненою функцією до заданої, є $f(x) = \frac{2}{x-1}$. Таким чином

$$f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2} \text{ і } f'(g(x)) = -\frac{2}{(g(x)-1)^2} = -\frac{2}{\left(\frac{x+2}{x}-1\right)^2} = -\frac{x^2}{2}.$$

$$\text{Отже, } g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = -\frac{2}{x^2}.$$

$$\text{Відповідь. } -\frac{2}{x^2}.$$

Примітка. Знайдіть похідну функції $g(x)$ за правилом обчислення похідної частки й порівняйте результати.

IV. Похідні обернених тригонометричних функцій

Розглянемо функцію $y = \arcsin x$, $-1 \leq x \leq 1$ (див. рисунок).

Оскільки на інтервалі $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функція $x = \sin y$ зростає і похідна $x'_y = (\sin y)'_y = \cos y > 0$, то всі умови доведеної вище теореми виконуються.

$$\text{Тоді } (\arcsin x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y}.$$

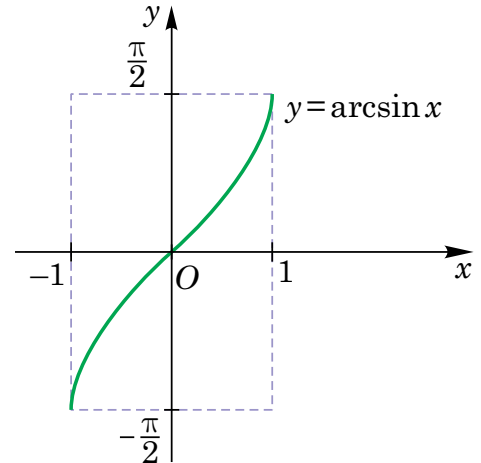
Оскільки на інтервалі $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos y > 0$, то з рівності $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ знаходимо $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$, $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$.

$$\text{Таким чином, } (\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Відомо, що $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$. Оскільки функція $y = \arcsin x$ не є диференційовною в точках -1 і 1 , то функція $y = \arccos x$ також не є диференційовною в точках -1 і 1 . Для будь-якого $x \in (-1; 1)$ можна записати:

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Міркуючи аналогічно, можна самостійно довести диференційованість функцій $y = \arctg x$ і $y = \text{arcctg } x$.



Похідні обернених тригонометричних функцій

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$(\arctg x)' = \frac{1}{1 + x^2},$$

$$(\text{arcctg } x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Ілюстративні приклади

7. Знайдіть похідну $y = \arcsin(2x^3)$.

Розв'язання. Скористаємось правилом обчислення похідної складеної функції та похідною оберненої тригонометричної функції.

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(2x^3)^2}} \cdot (2x^3)', \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-4x^6}} \cdot 6x^2 = \frac{6x^2}{\sqrt{1-4x^6}}.$$

Відповідь. $\frac{6x^2}{\sqrt{1-4x^6}}.$

8. Знайдіть похідну функції $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2)$.

Розв'язання. Нехай $g(x) = x^2$, тоді $g'(x) = 2x$.

За формулою похідної оберненої тригонометричної функції:

$$f'(x) = \frac{1}{1+(x^2)^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^4}.$$

Відповідь. $\frac{2x}{1+x^4}.$

9. Знайдіть похідну $h(x) = x^2 \arcsin x$.

Розв'язання. $h'(x) = 2x \cdot \arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x^2.$

Відповідь. $2x \arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x^2.$

V. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Василь Заплутайко знаходить похідну функції $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ на її області визначення так:

$$f'(x) = (\arcsin x + \arccos x)' = (\arcsin x)' + (\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

для всіх $x \in D(f)$. Чи погоджуєтесь ви з розв'язанням Василя? Чи правильну відповідь отримав Василь?

2. Знайдіть похідну функції:

1) $y = \arcsin x$; 2) $y = \arccos x$; 3) $y = \operatorname{arctg} x$; 4) $y = \operatorname{arcctg} x$.

3. Знайдіть похідну функції $y = \operatorname{arctg} 4x + \operatorname{arcctg} 4x$.

4. Знайдіть похідну функції:

1) $y = \operatorname{arctg} x^3$; 2) $y = \frac{\arccos x}{x^2 - 1}$; 3) $y = \operatorname{arctg}(x^2 - 1)$; 4) $y = \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{x}$.

5. Знайдіть похідну функції:

1) $y = x^2 \operatorname{arcctg} x$; 2) $y = x^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$; 3) $y = \frac{\arcsin \sqrt{x}}{x^2 - x}$; 4) $y = \operatorname{arctg}^2 3x$.

6. Знайдіть похідну функції:

1) $y = \arcsin(3x)$; 2) $y = \arccos(2x + 1)$; 3) $y = \operatorname{arctg}(\sqrt{x})$; 4) $y = \operatorname{arcctg}(5x^2)$.

7. Знайдіть похідну функції:

1) $y = \arcsin x + \operatorname{arctg} x$;

3) $y = \operatorname{arctg} x^2 + \arccos x$;

2) $y = \arccos (2x) + \arcsin x$;

4) $y = \operatorname{arcctg} x + \arcsin 3x$.

Рівень В

1. Знайдіть похідну функції:

1) $y = x \cdot \arcsin x$; 2) $y = x^2 \cdot \operatorname{arctg} x$; 3) $y = \sqrt{x} \arccos x$; 4) $y = x^{10} \cdot \arcsin (2x)$.

2. Кут підйому ракети описується функцією $\alpha(t) = \arcsin (0,1t)$. Знайдіть швидкість зміни кута в момент $t = 2$ с.

3. Платформа повертається під кутом $\alpha(t) = \arccos (1 - 0,2t)$. Знайдіть $\alpha'(t)$ при $t = 1$ с.

4. Напрямок руху описується $h(t) = \operatorname{arctg} (3t^2)$. Знайдіть кутову швидкість при $t = 1$ с.

5. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції у заданій точці:

1) $y = \arcsin x, x_0 = 0,5$;

2) $y = \arccos (2x), x_0 = 0$;

3) $y = \operatorname{arctg} (x^2), x_0 = 1$;

4) $y = x \cdot \arcsin x, x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. Знайдіть значення x , при якому похідна набуває заданого значення:

1) $(\arcsin x)' = \frac{2}{\sqrt{3}}$;

2) $(\operatorname{arctg} (2x))' = \frac{1}{2}$.

Рівень С

1. Побудуйте графік функції $f(x)$ та дотичну до графіка в точці x_0 :

1) $f(x) = \arcsin x, x_0 = 1$;

2) $f(x) = \arccos x, x_0 = 0,5$.

2. Обчисліть похідну функції:

1) $y = \arcsin \left(\frac{3x}{5} \right)$;

2) $y = \arccos \left(\sqrt{1 - x^2} \right)$;

3) $y = \operatorname{arctg} (2x^2 + 1)$;

4) $y = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x} \right)$.

3. Розв'яжіть рівняння $f'(x) = 0$, якщо:

1) $f(x) = x \cdot \arccos x$;

2) $f(x) = \operatorname{arctg} x^3$;

3) $f(x) = \arccos x^2$;

4) $f(x) = \arcsin (2x^2 - 1)$.

4. Обчисліть похідну функції:

1) $y = \arcsin \left(\frac{x}{1 + x^2} \right)$;

2) $y = \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \right)$;

3) $y = \arccos \left(\frac{x}{2} \right)$;

4) $y = \arccos (\cos x)$.

5. Обчисліть похідну функції:

1) $y = \operatorname{arctg} (4x^3 + x)$;

2) $y = \operatorname{arctg} \left(\sqrt{1 - x^2} \right)$;

3) $y = \operatorname{arcctg} \left(\frac{1}{x} \right)$;

4) $y = \operatorname{arcctg} \left(\frac{x}{x-1} \right)$.

6. Обчисліть похідну функції:

1) $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$; 2) $y = x^2 \cdot \arcsin(x^3)$; 3) $y = \frac{x \cdot \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$; 4) $y = \frac{\arcsin x}{x}$.

7. Обчисліть похідну функції:

1) $y = \arcsin x^2 + \arccos x^3$; 2) $y = \operatorname{arctg} x^2 - \operatorname{arctg} x^2$;
3) $y = x \cdot (\arcsin x + \arccos x)$; 4) $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{\arcsin x}$.

VI. Рефлексія (1 хв)

- 1) Я сьогодні навчився/навчилась
-
-
- 2) Мені здалося цікавим
-
-
- 3) У мене залишилися запитання щодо
-
-

Можливі теми проєктів

1. Використання обернених тригонометричних функцій в інженерії.
2. Графіки обернених тригонометричних функцій та дотичних до них.
3. Використання обернених тригонометричних функцій у фізиці.
4. Історія виникнення аркфункцій і їхніх похідних.

Список використаної літератури

- 1) Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра: підручник для 11 кл. з поглибленим вивченням математики: у 2 ч.— Х. : Гімназія, 2011. — Ч. 1. — 256 с. : іл.