

Урок 14. Урок–практикум. Похідні обернених тригонометричних функцій

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) повторите основні обернені тригонометричні функції;
- 2) виконаєте завдання на знаходження похідних обернених тригонометричних функцій;
- 3) обговорите застосування нових знань у реальних задачах та математичному моделюванні.

II. Повторення

1. Обчисліть: $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
2. Знайдіть область визначення функції $y = \arcsin(3 - x^2)$.
3. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{arctg}(4x + 3) = -\frac{\pi}{6}$.
4. Розв'яжіть рівняння $\arcsin(4x + 3) = -\frac{\pi}{6}$.

III. Обчислення похідних функції обернених тригонометричних функцій

Формули обчислення похідних обернених тригонометричних функцій:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Доведемо формули похідних $y = \operatorname{arctg} x$ та $y = \operatorname{arcctg} x$.

$$y = (x - \operatorname{arcctg} x)(1 + \operatorname{arctg} x).$$

Знайдемо похідну функції $y = \operatorname{arctg} x$. За означенням арктангенса $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

і $\operatorname{tg} y = x$. Після диференціювання останньої рівності одержуємо $(\operatorname{tg} y)' = x'$, тобто $\frac{1}{\cos^2 y} \cdot y' = 1$. Звідси $y' = \cos^2 y$.

Оскільки $1 + \operatorname{tg}^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}$, то $\cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$.

Отже, при будь-яких значеннях x маємо $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$,

Аналогічно, якщо $y = \operatorname{arccotg} x$, то за означенням арккотангенса $y \in (0; \pi)$ і $\operatorname{ctg} y = x$. Після диференціювання останньої рівності одержуємо $(\operatorname{ctg} y)' = x'$, тобто $-\frac{1}{\sin^2 y} \cdot y' = 1$.

Звідси $y' = -\sin^2 y$.

Оскільки $1 + \operatorname{ctg}^2 y = \frac{1}{\sin^2 y}$, то $\sin^2 y = \frac{1}{1 + x^2}$.

Отже, при будь-яких значеннях x маємо $(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Приклад 1. Знайдіть похідну функції $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2)$.

[illegible]

Приклад 2. Знайдіть похідну функції $h(x) = x^2 \arccos x$.

[illegible]

Приклад 3. Знайдіть похідну функції $h(x) = \arccos(3x - 1)$.

[illegible]

Приклад 4. Положення матеріальної точки в момент часу t описується функцією $s(t) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{t}\right)$, $t \geq \frac{1}{2}$. Знайдіть швидкість матеріальної точки у момент часу $t = 1$ с.

[illegible]

IV. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. На виробничій лінії робот-маніпулятор піднімає деталі з конвеєра та переносить їх на упаковку. Власники виробництва вирішили запросити експерта, який має визначити, чи коректно працює робот-маніпулятор. Кут $\Theta(t)$ у суглобі робота, який визначає нахил плеча відносно горизонталі, змінюється за часом t (в секундах) за законом $\Theta(t) = \arcsin(0,3t + 0,1)$ при $t \in [0, 2]$. Максимально допустимий кут суглоба становить 60° , а максимальна швидкість зміни кута — $0,3$ рад/с, щоб рух залишався плавним і без ривків. Робот завершує підйом вантажу за $t = 2$ с, без перевищення кута або швидкості.

- 1) Обчисліть швидкість зміни кута суглоба в момент часу $t = 0,5$ с.
- 2) Перевірте, чи не перевищує кут $\Theta(t)$ максимально допустимий у проміжку часу $t \in [0, 2]$.
- 3) Визначте, чи рух маніпулятора буде плавним в момент часу $t = 0,5$ с.

V. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Знайдіть похідну функції:

1) $y = \arcsin(2x)$; 2) $y = \arccos(3x)$; 3) $y = \arctg(5x)$; 4) $y = \operatorname{arctg}(\sqrt{x})$.

2. Знайдіть похідну функції:

1) $y = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$; 2) $y = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$; 3) $y = \arctg\left(\frac{2}{x}\right)$; 4) $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

3. Знайдіть похідну функції:

1) $y = \arcsin(\sqrt{x})$; 2) $y = \arccos(1 - x^2)$; 3) $y = \arctg(3x^4 - 1)$; 4) $y = \operatorname{arctg}(\sqrt[3]{x^5})$.

4. Знайдіть другу похідну функції:

1) $y = \arcsin x$; 2) $y = \arccos x$; 3) $y = \arctg x$; 4) $y = \operatorname{arctg} x$.

5. Обчисліть похідну функції:

1) $y = (\arcsin x)^2$; 2) $y = (\arccos x)^3$; 3) $y = (\arctg x)^4$; 4) $y = (\operatorname{arctg} x)^5$.

6. Знайдіть похідну функції:

1) $y = x \cdot \arcsin x$; 2) $y = \frac{\arccos x}{x}$; 3) $y = x^2 \cdot \arctg x$; 4) $y = \frac{\arctg x}{1 + x^2}$.

7. Знайдіть похідну функції:

1) $y = \sin(\arcsin x)$; 2) $y = \cos(\arccos x)$; 3) $y = \operatorname{tg}(\arctg x)$; 4) $y = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x)$.

Рівень В

1. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = 2 \cos x + 6 \arccos x$;

2) $f(x) = \sin x - 4 \arccos x$;

3) $f(x) = 5x^6 - \arcsin x$;

4) $f(x) = \sin x + x^2 \arctg x$.

2. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = \sin x + 9 \arcsin x$;

3) $f(x) = \operatorname{arctg} x + 4 \arccos x$;

2) $f(x) = 5 \arcsin x - \arccos x$;

4) $f(x) = \cos x - x^3 \arccos x$.

3. Знайдіть похідну функції:

1) $y = (x - x^2) \arcsin x$;

2) $y = (x - \operatorname{arctg} x)(1 + \operatorname{arctg} x)$.

4. Знайдіть похідну функції:

1) $y = \frac{x+1}{\operatorname{arctg} x}$;

2) $y = \frac{1 + \arcsin x}{1 - \arccos x}$.

5. Знайдіть похідну функції:

1) $y = \arccos x - 5x^3$; 2) $y = \arcsin x - 2x^2$; 3) $y = \operatorname{arctg} (2x^4)$; 4) $y = \arccos (4x^2)$.

6. Знайдіть похідну функції:

1) $y = (\arcsin (5x^2))^3$;

2) $y = \arcsin (3x^5 + 1)^3$;

3) $y = (\arccos (4x^2))^2$;

4) $y = \arccos (-2x^3 - 3)^3$.

7. Знайдіть прискорення матеріальної точки, якщо рівняння руху задано функцією $s(t)$:

1) $s(t) = \arcsin (t^2 - 1)$;

2) $s(t) = \arccos (\sqrt{t})$;

3) $s(t) = \operatorname{arctg} \frac{1}{t}$;

4) $s(t) = \operatorname{arctg} (1 - t^2)$.

Рівень С

1. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної проведеної в точці x_0 :

1) $y = x^3 \arcsin 2x$, $x_0 = 0,5$;

2) $y = (1 - x) \arccos 3x$, $x_0 = 0$;

3) $y = (2x - 1) \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$;

4) $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$, $x_0 = 2$.

2. Обчисліть похідну та визначте, для яких значень x вона від'ємна:

1) $y = \arccos (2x - 1)$;

2) $y = \arcsin \left(\frac{x}{2} \right)$;

3) $y = \operatorname{arctg} (3 - x)$;

4) $y = \operatorname{arctg} (x^2)$.

3. Знайдіть миттєву швидкість руху матеріальної точки в момент часу t_0 :

1) $s(t) = \arcsin \left(\frac{t}{2} \right) + t^2$, $t_0 = 1$;

2) $s(t) = t - \arccos \left(\frac{t}{3} \right)$, $t_0 = 0$;

3) $s(t) = \operatorname{arctg} (2t) - t$, $t_0 = 0,5$;

4) $s(t) = t^2 + \operatorname{arctg} (1 + t)$, $t_0 = 2$.

4. Знайдіть знак похідної функції:

1) $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2}$;

2) $y = \frac{\arcsin x}{x}$;

3) $y = \frac{\arccos (2x)}{x - 1}$;

4) $y = \frac{x \cdot \operatorname{arctg} x}{1 + x}$.

5. Визначте вид кута, який утворює дотична, проведена в точці x_0 , з додатним напрямом осі Ox :

1) $y = \arcsin \left(\frac{1}{x} \right)$, $x_0 = 2$;

2) $y = \arccos \left(\frac{1}{x} \right)$, $x_0 = 2$;

3) $y = \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{x} \right)$, $x_0 = 1$;

4) $y = \operatorname{arctg} \left(\frac{x+1}{x} \right)$, $x_0 = -1$.

Рефлексія

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
.....
.....
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
.....
.....
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
.....
.....
- 4) Найскладнішим для мене було
.....
.....
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
.....
.....
- 6) Найбільше мені сподобалося
.....
.....

Можливі теми проєктів

- 1.** Використання обернених тригонометричних функцій в інженерії.
- 2.** Графіки обернених тригонометричних функцій та дотичних.
- 3.** Використання обернених тригонометричних функцій у фізиці.
- 4.** Історія виникнення аркфункцій та їхніх похідних.







