

Урок 14. Урок–практикум. Похідні обернених тригонометричних функцій

Тип уроку: застосування знань, умінь і навичок.

План уроку

1. Обчислення похідних функції арксинус.
2. Обчислення похідних функції арккосинус.
3. Обчислення похідних арктангенс та арккотангенс.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

досліджує специфічну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела [12 МАО 1.2.1–1 П];

оцінює повноту і достовірність інформації [12 МАО 1.2.1–3 П];

планує дії та організовує роботу групи, ураховуючи розподіл ролей та оцінюючи внесок кожного [12 МАО 2.2.3–1 П];

оцінює результати за наданими чи самостійно розробленими критеріями [12 МАО 2.4.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.
- 6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити

математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С.

I. Організаційна частина (2–3 хв)

Мотиваційні запитання

1) Спостерігаючи за рухом планети або супутника, важливо знати кут їхнього підйому над горизонтом. Як визначити швидкість зміни цього кута при зміні відстані?

2) Щоб обчислити кут повороту об'єкта за його координатами на площині, використовують арктангенс. Як знайти швидкість повороту об'єкта?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Обчисліть: $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Відповідь. 1.

2. Знайдіть область визначення функції $y = \arcsin(3 - x^2)$.

Відповідь. $[-2; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; 2]$.

3. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{arctg}(4x + 3) = -\frac{\pi}{6}$.

Відповідь. Розв'язків немає.

4. Розв'яжіть рівняння $\arcsin(4x + 3) = -\frac{\pi}{6}$.

Відповідь. $-0,875$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. На виробничій лінії робот-маніпулятор піднімає деталі з конвеєра та переносить їх на упаковку. Власники виробництва вирішили запросити експерта, який має визначити, чи коректно працює робот-маніпулятор. Кут $\Theta(t)$ у суглобі робота, який визначає нахил плеча відносно горизонталі, змінюється за часом t (в секундах) за законом $\Theta(t) = \arcsin(0,3t + 0,1)$ при $t \in [0, 2]$. Максимально допустимий кут суглоба становить 60° , а максимальна швидкість зміни кута — $0,3$ рад/с, щоб рух залишався плавним і без ривків. Робот завершує підйом вантажу за $t = 2$ с, без перевищення кута або швидкості.

- 1) Обчисліть швидкість зміни кута суглоба в момент часу $t = 0,5$ с.
- 2) Перевірте, чи не перевищує кут $\Theta(t)$ максимально допустимий у проміжку часу $t \in [0, 2]$.
- 3) Визначте, чи рух маніпулятора буде плавним в момент часу $t = 0,5$ с.

III. Обчислення похідних функції обернених тригонометричних функцій

Формули обчислення похідних обернених тригонометричних функцій:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Доведемо формули похідних $y = \operatorname{arctg} x$ та $y = \operatorname{arcctg} x$.

$$y = (x - \operatorname{arcctg} x)(1 + \operatorname{arctg} x).$$

Знайдемо похідну функції $y = \operatorname{arctg} x$. За означенням арктангенса $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

і $\operatorname{tg} y = x$. Після диференціювання останньої рівності одержуємо $(\operatorname{tg} y)' = x'$, тобто

$$\frac{1}{\cos^2 y} \cdot y' = 1. \text{ Звідси } y' = \cos^2 y.$$

$$\text{Оскільки } 1 + \operatorname{tg}^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}, \text{ то } \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

$$\text{Отже, при будь-яких значеннях } x \text{ маємо } (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2},$$

Аналогічно, якщо $y = \operatorname{arcctg} x$, то за означенням арккотангенса $y \in (0; \pi)$ і $\operatorname{ctg} y = x$.

Після диференціювання останньої рівності одержуємо $(\operatorname{ctg} y)' = x'$, тобто $-\frac{1}{\sin^2 y} \cdot y' = 1$.

Звідси $y' = -\sin^2 y$.

$$\text{Оскільки } 1 + \operatorname{ctg}^2 y = \frac{1}{\sin^2 y}, \text{ то } \sin^2 y = \frac{1}{1 + x^2}.$$

$$\text{Отже, при будь-яких значеннях } x \text{ маємо } (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Ілюстративні приклади

5. Знайдіть похідну функції $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2)$.

Розв'язання. Нехай $g(x) = x^2$, тоді $g'(x) = 2x$. Підставимо отримані значення у формулу, отримаємо: $f'(x) = -\frac{1}{1+(x^2)^2} \cdot 2x$.

Спростимо вираз: $f'(x) = -\frac{2x}{1+x^4}$.

Відповідь. $-\frac{2x}{1+x^4}$.

6. Знайдіть похідну функції $h(x) = x^2 \arccos x$.

Розв'язання. Для обчислення похідної використаємо правило обчислення похідної добутку функцій: $h'(x) = 2x \cdot \arccos x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x^2$.

Відповідь. $2x \cdot \arccos x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x^2$.

7. Знайдіть похідну функції $h(x) = \arccos(3x-1)$.

Розв'язання. Нехай $g(x) = 3x-1$, тоді $g'(x) = 3$. Підставимо отримані значення у формулу, отримаємо: $h'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-(3x-1)^2}} \cdot 3 = -\frac{3}{\sqrt{6x-9x^2}}$.

Відповідь. $-\frac{3}{\sqrt{6x-9x^2}}$.

8. Положення матеріальної точки в момент часу t описується функцією $s(t) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{t}\right)$, $t \geq \frac{1}{2}$. Знайдіть швидкість матеріальної точки у момент часу $t = 1$ с.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції $s(t)$: $v(t) = s'(t) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)$.

Спростимо вираз і отримаємо $v(t) = -\frac{1}{t^2+1}$. Отже, $v(1) = -0,5$.

Відповідь. $-0,5$.

9. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка $f(x) = \arcsin x$ в точці $x_0 = 0$.

Розв'язання. Кутовий коефіцієнт дотичної — це значення похідної у цій точці:

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Тоді $f'(0) = \frac{1}{\sqrt{1-0^2}} = 1$.

Відповідь. 1.

IV. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (7–8 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. На виробничій лінії робот-маніпулятор піднімає деталі з конвеєра та переносить їх на упаковку. Власники виробництва вирішили запросити експерта, який має визначити, чи коректно працює робот-маніпулятор. Кут $\Theta(t)$ у суглобі робота, який визначає нахил плеча відносно горизонталі, змінюється за часом t (в секундах) за законом $\Theta(t) = \arcsin(0,3t + 0,1)$ при $t \in [0, 2]$. Максимально допустимий кут суглоба становить 60° , а максимальна швидкість зміни кута — $0,3$ рад/с, щоб рух залишався плавним і без ривків. Робот завершує підйом вантажу за $t = 2$ с, без перевищення кута або швидкості.

1) Обчисліть швидкість зміни кута суглоба в момент часу $t = 0,5$ с.

2) Перевірте, чи не перевищує кут $\Theta(t)$ максимально допустимий у проміжку часу $t \in [0, 2]$.

3) Визначте, чи рух маніпулятора буде плавним в момент часу $t = 0,5$ с.

Розв'язання. 1) Щоб знайти формулу для миттєвої швидкості зміни кута знайдемо

$$\text{похідну функції } \Theta(t): \Theta(t) = \frac{0,3}{\sqrt{1 - (0,3t + 0,1)^2}}.$$

Знайдемо значення миттєвої швидкості в момент часу $t = 0,5$ с:

$$\Theta'(0,5) = \frac{0,3}{\sqrt{1 - (0,3 \cdot 0,5 + 0,1)^2}} \approx 1,032 \text{ (радіан/секунду)}.$$

2) Розв'яжемо нерівність $\arcsin(0,3t + 0,1) \leq \frac{\pi}{3}$,

$$-1 \leq 0,3t + 0,1 \leq \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -3,6 \leq t \leq 2,553.$$

Тобто, на проміжку $[-3,6; 2,553]$, а отже, і для значень $t \in [0, 2]$, кут не перевищує максимально допустимого значення.

3) Оскільки $1,032 > 0,3$, то швидкість руху в конкретний момент часу перевищує допустиму, тому рух не буде плавним.

Відповідь. 1) $1,032$ рад/с; 2) кут не перевищує максимально допустимого значення;

3) рух не буде плавним.

V. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Знайдіть похідну функції:

$$1) y = \arcsin(2x); \quad 2) y = \arccos(3x); \quad 3) y = \arctg(5x); \quad 4) y = \text{arctg}(\sqrt{x}).$$

2. Знайдіть похідну функції:

$$1) y = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right); \quad 2) y = \arccos\left(\frac{1}{x}\right); \quad 3) y = \arctg\left(\frac{2}{x}\right); \quad 4) y = \text{arctg}\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

3. Знайдіть похідну функції:

$$1) y = \arcsin(\sqrt{x}); \quad 2) y = \arccos(1 - x^2); \quad 3) y = \arctg(3x^4 - 1); \quad 4) y = \text{arctg}(\sqrt[3]{x^5}).$$

4. Знайдіть другу похідну функції:

1) $y = \arcsin x$; 2) $y = \arccos x$; 3) $y = \arctg x$; 4) $y = \operatorname{arcctg} x$.

5. Обчисліть похідну функції:

1) $y = (\arcsin x)^2$; 2) $y = (\arccos x)^3$; 3) $y = (\arctg x)^4$; 4) $y = (\operatorname{arcctg} x)^5$.

6. Знайдіть похідну функції:

1) $y = x \cdot \arcsin x$; 2) $y = \frac{\arccos x}{x}$; 3) $y = x^2 \cdot \arctg x$; 4) $y = \frac{\operatorname{arcctg} x}{1 + x^2}$.

7. Знайдіть похідну функції:

1) $y = \sin (\arcsin x)$; 2) $y = \cos (\arccos x)$; 3) $y = \operatorname{tg} (\arctg x)$; 4) $y = \operatorname{ctg} (\operatorname{arcctg} x)$.

Рівень В

1. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = 2 \cos x + 6 \arccos x$; 2) $f(x) = \sin x - 4 \arccos x$;
3) $f(x) = 5x^6 - \arcsin x$; 4) $f(x) = \sin x + x^2 \arctg x$.

2. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = \sin x + 9 \arcsin x$; 2) $f(x) = 5 \arcsin x - \arccos x$;
3) $f(x) = \arctg x + 4 \arccos x$; 4) $f(x) = \cos x - x^3 \arccos x$.

3. Знайдіть похідну функції:

1) $y = (x - x^2) \arcsin x$; 2) $y = (x - \operatorname{arcctg} x)(1 + \arctg x)$.

4. Знайдіть похідну функції:

1) $y = \frac{x+1}{\arctg x}$; 2) $y = \frac{1 + \arcsin x}{1 - \arccos x}$.

5. Знайдіть похідну функції:

1) $y = \arccos x - 5x^3$; 2) $y = \arcsin x - 2x^2$; 3) $y = \arctg (2x^4)$; 4) $y = \arccos (4x^2)$.

6. Знайдіть похідну функції:

1) $y = (\arcsin (5x^2))^3$; 2) $y = \arcsin (3x^5 + 1)^3$;
3) $y = (\arccos (4x^2))^2$; 4) $y = \arccos (-2x^3 - 3)^3$.

7. Знайдіть прискорення матеріальної точки, якщо рівняння руху задано функцією $s(t)$:

1) $s(t) = \arcsin (t^2 - 1)$; 2) $s(t) = \arccos (\sqrt{t})$;
3) $s(t) = \operatorname{arcctg} \frac{1}{t}$; 4) $s(t) = \operatorname{arcctg} (1 - t^2)$.

Рівень С

1. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної проведеної в точці x_0 :

1) $y = x^3 \arcsin 2x$, $x_0 = 0,5$; 2) $y = (1 - x) \arccos 3x$, $x_0 = 0$;
3) $y = (2x - 1) \arctg x$, $x_0 = 1$; 4) $y = \frac{\operatorname{arcctg} x}{x}$, $x_0 = 2$.

2. Обчисліть похідну та визначте, для яких значень x вона від'ємна:

1) $y = \arccos (2x - 1)$; 2) $y = \arcsin \left(\frac{x}{2} \right)$;
3) $y = \arctg (3 - x)$; 4) $y = \operatorname{arcctg} (x^2)$.

3. Знайдіть миттєву швидкість руху матеріальної точки в момент часу t_0 :

1) $s(t) = \arcsin\left(\frac{t}{2}\right) + t^2, t_0 = 1;$

2) $s(t) = t - \arccos\left(\frac{t}{3}\right), t_0 = 0;$

3) $s(t) = \operatorname{arctg}(2t) - t, t_0 = 0,5;$

4) $s(t) = t^2 + \operatorname{arctg}(1+t), t_0 = 2.$

4. Знайдіть знак похідної функції:

1) $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2};$

2) $y = \frac{\arcsin x}{x};$

3) $y = \frac{\arccos(2x)}{x-1};$

4) $y = \frac{x \cdot \operatorname{arctg} x}{1+x}.$

5. Визначте вид кута, який утворює дотична, проведена в точці x_0 , з додатним напрямком осі Ox :

1) $y = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right), x_0 = 2;$

2) $y = \arccos\left(\frac{1}{x}\right), x_0 = 2;$

3) $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x}\right), x_0 = 1;$

4) $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{x}\right), x_0 = -1.$

VI. Рефлексія (1–2 хв)

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
- 4) Найскладнішим для мене було
- 5) Тепер я впевнений/впевнена у своїй здатності
- 6) Найбільше мені сподобалося

Можливі теми проєктів

- 1.** Використання обернених тригонометричних функцій в інженерії.
- 2.** Графіки обернених тригонометричних функцій та дотичних.
- 3.** Використання обернених тригонометричних функцій у фізиці.
- 4.** Історія виникнення аркфункцій та їхніх похідних.