

Урок 15. Рівняння дотичної, проведеної до графіка функції

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

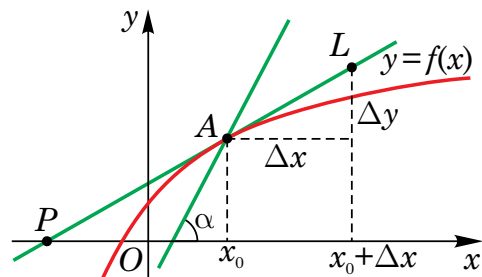
- 1) дізнаєтесь, як знаходити рівняння дотичної до графіка функції в заданій точці;
- 2) пригадаєте, як знаходити похідну функції в точці та що вона означає;
- 3) навчитесь складати рівняння дотичної до графіка функції;
- 4) з'ясуєте умову паралельності двох прямих;
- 5) розглянете приклади застосування дотичної в практичних ситуаціях;
- 6) навчитесь розв'язувати задачі на знаходження рівняння дотичної до графіка функції.

II. Повторення

1. Обчисліть похідну функції $y = -\frac{7}{6}x^6 + 5x^4 - 14$. (ЗНО, 2018 р.).
2. Обчисліть похідну функції $f(x) = x(x^3 + 1)$. (ЗНО, 2018 р.).
3. Обчисліть похідну функції $y = x^4 + 3\cos x$. (ЗНО, 2009 р.).
4. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t$, де $s(t)$ — шлях (у метрах), t — час (у секундах). Визначте прискорення руху тіла в момент $t = 10$ с. (ЗНО, 2009 р.).

III. Рівняння дотичної, проведеної до графіка функції у певній точці

З поняттям дотичної до графіка функції ви вже ознайомлені. Графік диференційовної в точці x_0 функції $f(x)$ поблизу x_0 практично не відрізняється від відрізка дотичної, а отже, ця ділянка графіка наближено дорівнює відрізку січної l , що проходить через точки $(x_0; f(x_0))$ і $(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$. Будь-яка з таких січних проходить через точку $A(x_0; f(x_0))$ графіка (див. рисунок).



Щоб однозначно задати пряму, яка проходить через дану точку A , достатньо задати її кутовий коефіцієнт. Кутовий коефіцієнт $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ січної, якщо $\Delta x \rightarrow 0$, прямує до числа $f'(x_0)$, який і є кутовим коефіцієнтом дотичної. Тому, дотична є граничним положенням січної, якщо $\Delta x \rightarrow 0$.

Якщо $f'(x_0)$ не існує, то дотична або не існує або це — вертикальна пряма.

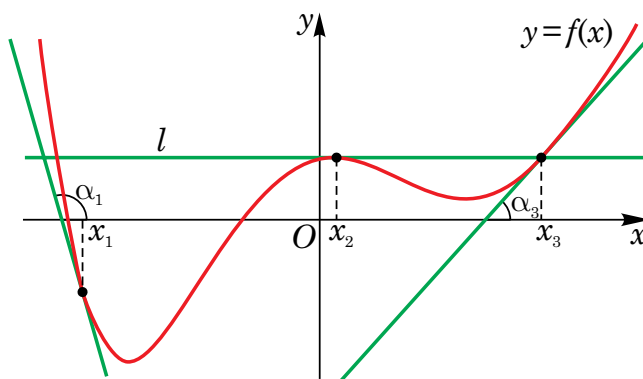
Отже, існування похідної функції $f(x)$ в точці x_0 рівносильне існуванню неvertи-кальної дотичної, проведеної до графіка функції, в точці $(x_0; f(x_0))$. При цьому кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює $f'(x_0)$.

Означення. Дотичною до графіка диференційовної в точці x_0 функції $f(x)$ є пряма, яка проходить через точку $(x_0; f(x_0))$ і має кутовий коефіцієнт $f'(x_0)$.

Проведемо дотичні до графіка функції $f(x)$ у точках x_1, x_2, x_3 і позначимо кути, які вони утворюють з віссю абсцис, як $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (див. рисунок).

За побудовою, кут α_1 — тупий, кут α_3 — гострий, а кут $\alpha_2 = 0$, бо пряма l паралельна осі Ox . Тангенс гострого кута додатний, тупого — від'ємний, а $\tan 0^\circ = 0$.

Тому $f'(x_1) < 0$, $f'(x_2) = 0$, $f'(x_3) > 0$. Таким чином, якщо кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює 0, то дотична паралельна осі Ox .



За побудовою, кут α_1 — тупий, кут α_3 — гострий, а кут $\alpha_2 = 0$, бо пряма l паралельна осі Ox . Тангенс гострого кута додатний, тупого — від'ємний, а $\tan 0^\circ = 0$.

Тому $f'(x_1) < 0$, $f'(x_2) = 0$, $f'(x_3) > 0$. Таким чином, якщо кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює 0, то дотична паралельна осі Ox .

Рівняння дотичної до графіка функції в деякій точці x_0

Нехай до графіка функції $f(x)$ у точці $A(x_0; f(x_0))$ проведена дотична.

Запишемо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $f'(x_0)$:

$$y = f'(x_0) \cdot x + b.$$

Для обчислення числа b скористаємось тим, що дотична проходить через точку A , тому координати точки задовольняють рівняння прямої: $f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$, звідси $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$.

Число b підставимо у рівняння прямої $y = f'(x_0) \cdot x + b$.

Тоді, рівняння дотичної:

$$y = f'(x_0) \cdot x - f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0) \text{ або } y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Таким чином, щоб скласти рівняння дотичної, потрібно знати три числа:

- 1) x_0 — абсцису точки дотику;
- 2) $f(x_0)$ — значення функції в точці з абсцисою x_0 ;
- 3) $f'(x_0)$ — значення похідної функції в точці x_0 або кутовий коефіцієнт дотичної.

Приклад 1. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ у точці з абсцисою 2.

Розв'язання. Рівняння дотичної $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Нехай $x_0 = 2$, тоді $f(x_0) = f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 1 = 1$.

Похідна функції: $f'(x) = 3x^2 - 4x$.

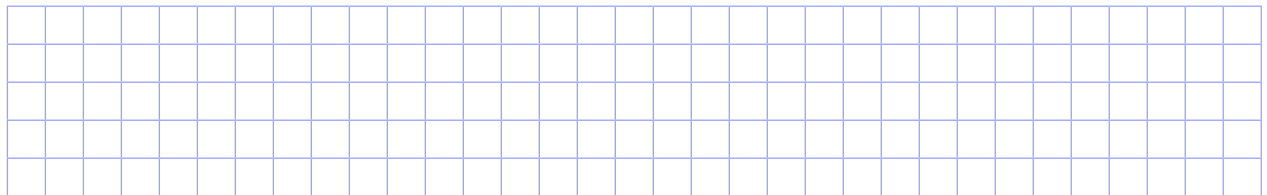
Значення похідної у точці $x_0 = 2$: $f'(x_0) = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 4$.

Підставимо знайдені числа у рівняння дотичної:

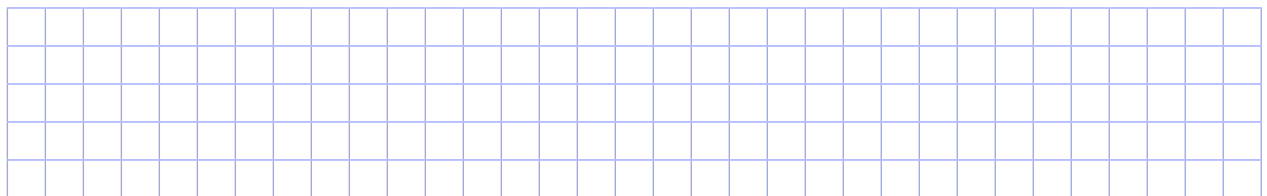
$y = 1 + 4(x - 2)$, отже, $y = 4x - 7$.

Відповідь. $y = 4x - 7$.

Приклад 2. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$ у точці $x_0 = 3$.



Приклад 3. Знайдіть рівняння дотичної до параболи $y = x^2$ у точці з абсцисою x_0 .



IV. Метод дотичних для наближеного розв'язування рівнянь. Метод Ньютона

Деякі види рівнянь складно розв'язати знайомими нам методами. Наприклад, рівняння $x^5 + x + 1 = 0$ або $\cos x = x$. Існують методи знаходження наближених коренів рівняння. Розглянемо один із таких, який має назву метод Ньютона.

В основі цього методу лежить використання дотичних. Якщо значення x досить близьке до кореня рівняння $f(x) = 0$, то дотична до графіка функції в точці $(x, f(x))$ перетинає вісь Ox у точці, яка розташована ближче до кореня, ніж початкове значення x .

За методом Ньютона висловлюється припущення, яким є значення кореня рівняння. Позначимо його x_0 . Побудуємо дотичну до графіка функції в точці $(x_0, f(x_0))$ і визна-

чимо, у якій точці дотична перетинає вісь абсцис. Позначимо цю точку x_1 . Повторимо цей процес — побудуємо дотичну до графіка функції в точці $(x_1, f(x_1))$ і визначимо точку, у якій побудована дотична перетинає вісь Ox . Позначимо цю точку за x_2 . Повторюємо цей алгоритм — і отримаємо точки x_3, x_4 тощо. Послідовність дій продовжуємо доти поки не отримуємо корінь із необхідною точністю.

Даний процес, можна записати алгебрично. Проаналізуємо, як була отримана точка x_1 . Спочатку була проведена дотична до графіка функції в точці $(x_0, f(x_0))$. Кутовий коефіцієнт дотичної — $f'(x_0)$, рівняння дотичної $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Ця пряма перетинає вісь абсцис при $y = 0$, а значення аргументу позначено x_1 .

Тоді замінимо x на x_1 , $y = 0$, отримаємо рівняння: $0 = f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0)$.

$$\text{Розв'яжемо його для } x_1: x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

$$\text{Аналогічно повторимо алгоритм для } x_2 \text{ та } x_1, \text{ отримаємо } x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

У загальному випадку, знаючи наближене значення x_n , можна знайти наступне наближення x_{n+1} . Узагальнимо: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Алгоритм використання методу Ньютона

Нехай функція $f(x)$ диференційовна функція на інтервалі I , який містить корінь рівняння $f(x) = 0$. Тоді, щоб знайти наближене значення кореня з точністю до d знаків після коми потрібно:

1. Оберіть значення x_0 як початкове наближене значення кореня (зазвичай гіпотезу про значення x_0 роблять за графіком функції $f(x)$).
2. Створіть послідовність наближень, маючи наближення x_n , обчисліть наступне наближення x_{n+1} : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
3. Зупиніть процес, якщо отримане наближення буде мати точність d знаків після коми.

Варто зауважити, що Метод Ньютона не є безпомилковим. Послідовність наближених значень може не збігатися або збігатися настільки повільно, що можна помилково вважати певне наближення точнішим, ніж воно є насправді.

Приклад 4. Знайдіть наближений дійсний корінь рівняння $x^3 - x^2 - 1 = 0$ з точністю до шести знаків після коми, використовуючи метод Ньютона та початкове наближення $x_0 = 1$.

Розв'язання. Для початку, знайдемо $f'(x) = 3x^2 - 2x$. Тоді застосуємо алгоритм методу Ньютона:

$$x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{1^3 - 1^2 - 1}{3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1} = 2,$$

$$x_2 = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{2^3 - 2^2 - 1}{3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2} = 1,625,$$

$$x_3 = 1,625 - \frac{f(1,625)}{f'(1,625)} = 2 - \frac{1,625^3 - 1,625^2 - 1}{3 \cdot 1,625^2 - 2 \cdot 1,625} \approx 1,48579,$$

$$x_4 = 1,48579 - \frac{f(1,48579)}{f'(1,48579)} \approx 1,46596,$$

$$x_5 = 1,46596 - \frac{f(1,46596)}{f'(1,46596)} \approx 1,46557.$$

Було виконано п'ять кроків обчислень, щоб знайти корінь рівняння з точністю до шести знаків після коми.

Відповідь. 1,46557.

V. Умова паралельності прямих

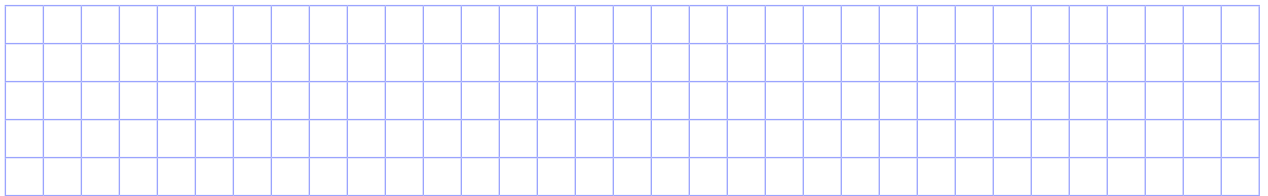
Дві прямі $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ паралельні в тому випадку, якщо вони утворюють рівні кути α_1 і α_2 з додатним напрямком осі Ox .

Тоді $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2$ або $k_1 = k_2$.

Отже, щоб дві прямі були паралельні, необхідно і достатньо, щоб їхні кутові коефіцієнти були рівні.

За геометричним змістом похідної, якщо дотичні прямі, проведені до графіка функції $f(x)$ у точках x_1 і x_2 — паралельні, то $f'(x_1) = f'(x_2)$.

Приклад 5. Знайдіть рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $f(x) = x^2 - x + 3$, яка паралельна прямій $x + y + 3 = 0$.



VI. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Автомобіль рухається гірським серпантином — звивистою дорогою, що прокладена вздовж схилу гори. Траєкторія руху автомобіля описується функцією $s(t) = -0,1t^2 + 12t + 20$, де $s(t)$ — відстань, яку подолав автомобіль (у сотнях метрів), t — час руху (в хвилинах). Оскільки звивиста дорога має багато поворотів, важливо дослідити, який нахил або вигин траєкторії спостерігається за певним поворотом. Кут нахилу траєкторії по відношенню до поверхні землі не повинен перевищувати 15° .

1. У який момент часу автомобіль досягає крайньої верхньої точки маршруту?
2. Яку відстань подолає автомобіль до цієї точки?
3. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $s(t)$ через одну хвилину після повороту у верхній крайній точці.
4. Визначте кут нахилу цієї дотичної. Чи відповідає нахил дотичної дорожнім нормам безпеки?

- 3.** У яких точках дотичні до графіка функції $y = \frac{1}{x}$ паралельні прямій $y = -x$?
- 4.** Знайдіть точку на графіку функції $f(x)$ таку, що дотична, проведена до графіка в цій точці, утворює з додатним напрямком осі абсцис кут α :
- 1) $f(x) = \sqrt{3}x - \frac{x^3}{3}$, $\alpha = 60^\circ$; 2) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$, $\alpha = 45^\circ$.
- 5.** Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x)$ у точці з абсцисою x_0 :
- 1) $f(x) = \frac{3}{x}$, $x_0 = -1$; 2) $f(x) = 2x - x^2$, $x_0 = 0$;
 3) $f(x) = x^2 + 1$, $x_0 = 1$; 4) $f(x) = x^3 - 1$, $x_0 = 2$.
- 6.** Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x)$ у точці з абсцисою x_0 :
- 1) $f(x) = 3\sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$; 2) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;
 3) $f(x) = 1 + \cos x$, $x_0 = 0$; 4) $f(x) = -2\sin x$, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$.
- 7.** Знайдіть точки графіка функції $f(x)$, в яких дотична паралельна осі абсцис:
- 1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$; 2) $f(x) = 0,5x^4 + 16x$;
 3) $f(x) = 3x^4 - 6x^2 + 2$; 4) $f(x) = x^3 - 3x + 1$.
- 8.** Знайдіть точки графіка функції $f(x)$, в яких дотична паралельна осі абсцис:
- 1) $f(x) = 2\cos x + x$; 2) $f(x) = \sin 2x + \sqrt{3}x$;
 3) $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; 4) $f(x) = \sqrt{2}x - 2\sin x$.
- 9.** Під яким кутом перетинається з віссю Ox графік функції:
- 1) $f(x) = 3x - x^2$; 2) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;
 3) $f(x) = x^2 - 3x + 2$; 4) $f(x) = -\cos x$?
- 10.** Під яким кутом перетинається з віссю Ox графік функції:
- 1) $f(x) = \frac{1}{x-1}$; 2) $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;
 3) $f(x) = 0,5(x-1)^2$; 4) $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$?

Рівень С

- 1.** Доведіть, що будь-яка дотична до графіка функції $f(x)$ утворює гострий кут із додатним напрямком осі абсцис:
- 1) $f(x) = x^5 + 2x - 8$; 2) $f(x) = \frac{4}{1-x}$.
- 2.** Знайдіть рівняння горизонтальних дотичних до графіка функції
- $$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4.$$
- 3.** Установіть, чи є пряма $y = 12x - 10$ дотичною до графіка функції $f(x) = 4x^3$. У разі позитивної відповіді вкажіть абсцису точки дотику.
- 4.** Обчисліть площу трикутника, утвореного осями координат і дотичною до графіка функції $f(x) = x^2 - 4$ у точці з абсцисою $x_0 = -2$.

- ## Рефлексія

- 1) На уроці я дізнався/дізналася
- 2) Мені найбільше запам'яталося
- 3) Для мене було найцікавішим
- 4) Для мене було найскладнішим
- 5) Я припустився/припустилася помилки
- 6) Я хочу повторити, аби краще зрозуміти
- 7) Поради собі до наступного уроку

1. Як нахил дороги впливає на швидкість підйому: дотична в гірській місцевості.
2. Застосування рівняння дотичної в архітектурі.
3. Створення анімації в програмі GeoGebra: дотична як динамічний об'єкт.
4. Дослідження та побудова графіків функцій за допомогою дотичних.

