

### Урок 15. Рівняння дотичної, проведеної до графіка функції

**Тип уроку:** застосування знань, умінь і навичок.

#### План уроку

1. Рівняння дотичної, проведеної до графіка функції у точці.
2. Приклади застосування рівняння дотичної.
3. Метод дотичних для наближеного розв'язування рівнянь.
4. Умова паралельності прямих.
5. Розв'язування задач на складання рівнянь дотичних до графіків функцій.

#### Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

пов'язує різні математичні знання і вміння, узагальнює їх, робить висновки [12 МАО 4.1.1–1 П];

визначає та усуває прогалини у власних математичних знаннях і вміннях у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 4.1.3–1 П];

визначає та усуває прогалини у власних математичних знаннях і вміннях у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 4.1.3–1 П];

описує проблемну ситуацію математичною мовою, формулює припущення [12 МАО 4.3.2–1 П].

#### Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого. Завдання можна розв'язувати усно.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.

6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С.

10) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

## I. Організаційна частина (2–3 хв)

### Мотиваційні ситуації

1) У веб-застосунку відображають графік активності користувачів за день. Потрібно передбачити, як швидко змінюється активність у певний момент. Чи можливо передбачити зміну активності за рівнянням дотичної до графіка активності у точці піку та використати це рівняння для прогнозування активності впродовж наступних 10 хвилин?

2) Потрібно виявити критичні моменти пікового навантаження на сервер. Чи можливо за рівнянням дотичної до графіка часу користування сервером у точках швидкого зростання визначити, де сервер починає "гальмувати", прогнозуючи потребу у масштабуванні його ресурсів?

## II. Повторення (3–4 хв)

1. Обчисліть похідну функції  $y = -\frac{7}{6}x^6 + 5x^4 - 14$ . (ЗНО, 2018 р.).

Відповідь.  $-7x^5 + 20x^3$ .

2. Обчисліть похідну функції  $f(x) = x(x^3 + 1)$ . (ЗНО, 2018 р.).

Відповідь.  $4x^3 + 1$ .

3. Обчисліть похідну функції  $y = x^4 + 3\cos x$ . (ЗНО, 2009 р.).

Відповідь.  $4x^3 - 3\sin x$ .

4. Тіло рухається прямолінійно за законом  $s(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t$ , де  $s(t)$  — шлях (у метрах),

$t$  — час (у секундах). Визначте прискорення руху тіла в момент  $t = 10$  с. (ЗНО, 2009 р.).

Відповідь.  $36 \text{ м/с}^2$ .

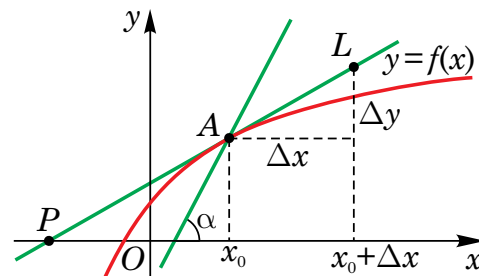
## Як я вирішую певну проблему?

**Задача.** Автомобіль рухається гірським серпантином — звивистою дорогою, що прокладена вздовж схилу гори. Траєкторія руху автомобіля описується функцією  $s(t) = -0,1t^2 + 12t + 20$ , де  $s(t)$  — відстань, яку подолав автомобіль (у сотнях метрів),  $t$  — час руху (в хвилинах). Оскільки звивиста дорога має багато поворотів, важливо дослідити, який нахил або вигин траєкторії спостерігається за певним поворотом. Кут нахилу траєкторії по відношенню до поверхні землі не повинен перевищувати  $15^\circ$ .

1. У який момент часу автомобіль досягає крайньої верхньої точки маршруту?
2. Яку відстань подолає автомобіль до цієї точки?
3. Складіть рівняння дотичної до графіка функції  $s(t)$  через одну хвилину після повороту у верхній крайній точці.
4. Визначте кут нахилу цієї дотичної. Чи відповідає нахил дотичної дорожнім нормам безпеки?

### III. Рівняння дотичної, проведеної до графіка функції у певній точці

З поняттям дотичної до графіка функції ви вже ознайомлені. Графік диференційовної в точці  $x_0$  функції  $f(x)$  поблизу  $x_0$  практично не відрізняється від відрізка дотичної, а отже, ця ділянка графіка наближено дорівнює відрізку січної  $l$ , що проходить через точки  $(x_0; f(x_0))$  і  $(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$ . Будь-яка з таких січних проходить через точку  $A(x_0; f(x_0))$  графіка (див. рисунок).



Щоб однозначно задати пряму, яка проходить через дану точку  $A$ , достатньо задати її кутовий коефіцієнт. Кутовий коефіцієнт  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  січної, якщо  $\Delta x \rightarrow 0$ , прямує до числа  $f'(x_0)$ , який і є кутовим коефіцієнтом дотичної. Тому, дотична є граничним положенням січної, якщо  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Якщо  $f'(x_0)$  не існує, то дотична або не існує або це — вертикальна пряма.

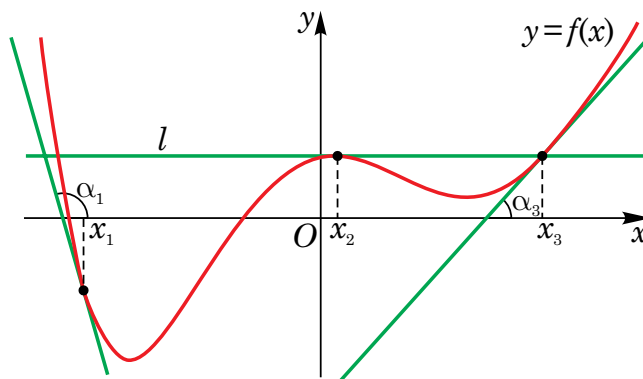
Отже, існування похідної функції  $f(x)$  в точці  $x_0$  рівносильне існуванню неvertи-кальної дотичної, проведеної до графіка функції, в точці  $(x_0; f(x_0))$ . При цьому кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює  $f'(x_0)$ .

**Означення.** Дотичною до графіка диференційовної в точці  $x_0$  функції  $f(x)$  є пряма, яка проходить через точку  $(x_0; f(x_0))$  і має кутовий коефіцієнт  $f'(x_0)$ .

Проведемо дотичні до графіка функції  $f(x)$  у точках  $x_1, x_2, x_3$  і позначимо кути, які вони утворюють з віссю абсцис, як  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  (див. рисунок).

За побудовою, кут  $\alpha_1$  — тупий, кут  $\alpha_3$  — гострий, а кут  $\alpha_2 = 0$ , бо пряма  $l$  паралельна осі  $Ox$ . Тангенс гострого кута додатний, тупого — від'ємний, а  $\tan 0^\circ = 0$ .

Тому  $f'(x_1) < 0$ ,  $f'(x_2) = 0$ ,  $f'(x_3) > 0$ . Таким чином, якщо кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює 0, то дотична паралельна осі  $Ox$ .



За побудовою, кут  $\alpha_1$  — тупий, кут  $\alpha_3$  — гострий, а кут  $\alpha_2 = 0$ , бо пряма  $l$  паралельна осі  $Ox$ . Тангенс гострого кута додатний, тупого — від'ємний, а  $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$ .

Тому  $f'(x_1) < 0$ ,  $f'(x_2) = 0$ ,  $f'(x_3) > 0$ . Таким чином, якщо кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює 0, то дотична паралельна осі  $Ox$ .

### Рівняння дотичної до графіка функції в деякій точці $x_0$

Нехай до графіка функції  $f(x)$  у точці  $A(x_0; f(x_0))$  проведена дотична.

Запишемо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом  $f'(x_0)$ :

$$y = f'(x_0) \cdot x + b.$$

Для обчислення числа  $b$  скористаємось тим, що дотична проходить через точку  $A$ , тому координати точки задовольняють рівняння прямої:  $f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$ , звідси  $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$ .

Число  $b$  підставимо у рівняння прямої  $y = f'(x_0) \cdot x + b$ .

Тоді, рівняння дотичної:

$$y = f'(x_0) \cdot x - f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0) \text{ або } y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Таким чином, щоб скласти рівняння дотичної, потрібно знати три числа:

- 1)  $x_0$  — абсцису точки дотику;
- 2)  $f(x_0)$  — значення функції в точці з абсцисою  $x_0$ ;
- 3)  $f'(x_0)$  — значення похідної функції в точці  $x_0$  або кутовий коефіцієнт дотичної.

### Ілюстративні приклади

- 5.** Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$  у точці з абсцисою 2.

*Розв'язання.* Рівняння дотичної  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ .

Нехай  $x_0 = 2$ , тоді  $f(x_0) = f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 1 = 1$ .

Похідна функції:  $f'(x) = 3x^2 - 4x$ .

Значення похідної у точці  $x_0 = 2$ :  $f'(x_0) = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 4$ .

Підставимо знайдені числа у рівняння дотичної:

$y = 1 + 4(x - 2)$ , отже,  $y = 4x - 7$ .

*Відповідь.*  $y = 4x - 7$ .

- 6.** Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції  $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$  у точці  $x_0 = 3$ .

*Розв'язання.* Знайдемо числа  $f(x_0)$  і  $f'(x_0)$ .

1)  $f(x_0) = f(3) = 4 \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 3^3 = 12 - 9 = 3$ .

2)  $f'(x) = 4 - x^2$ .

$$3) f'(x_0) = f'(3) = 4 - 3^2 = -5.$$

$$\text{Отже, } y = -5(x - 3) + 3 = -5x + 18.$$

$$\text{Відповідь. } y = -5x + 18.$$

- 7.** Знайдіть рівняння дотичної до параболи  $y = x^2$  у точці з абсцисою  $x_0$ .

*Розв'язання.* Із умови:  $y(x_0) = x_0^2$ , а  $y'(x_0) = 2x_0$ .

Підставивши ці значення у рівняння дотичної, отримаємо:

$$y = x_0^2 + 2x_0(x - x_0), \text{ тобто } y = 2x_0x - x_0^2.$$

Наприклад, якщо  $x_0 = 1$ , то маємо рівняння  $y = 2x - 1$ .

$$\text{Відповідь. } y = 2x_0x - x_0^2.$$

## IV. Метод дотичних для наближеного розв'язування рівнянь. Метод Ньютона

Деякі види рівнянь складно розв'язати знайомими нам методами. Наприклад, рівняння  $x^5 + x + 1 = 0$  або  $\cos x = x$ . Існують методи знаходження наближених коренів рівняння. Розглянемо один із таких, який має назву метод Ньютона.

В основі цього методу лежить використання дотичних. Якщо значення  $x$  досить близьке до кореня рівняння  $f(x) = 0$ , то дотична до графіка функції в точці  $(x, f(x))$  перетинає вісь  $Ox$  у точці, яка розташована ближче до кореня, ніж початкове значення  $x$ .

За методом Ньютона висловлюється припущення, яким є значення кореня рівняння. Позначимо його  $x_0$ . Побудуємо дотичну до графіка функції в точці  $(x_0, f(x_0))$  і визначимо, у якій точці дотична перетинає вісь абсцис. Позначимо цю точку  $x_1$ . Повторимо цей процес — побудуємо дотичну до графіка функції в точці  $(x_1, f(x_1))$  і визначимо точку, у якій побудована дотична перетинає вісь  $Ox$ . Позначимо цю точку за  $x_2$ . Повторюємо цей алгоритм — і отримаємо точки  $x_3, x_4$  тощо. Послідовність дій продовжуємо доти поки не отримуємо корінь із необхідною точністю.

Даний процес, можна записати алгебрично. Проаналізуємо, як була отримана точка  $x_1$ . Спочатку була проведена дотична до графіка функції в точці  $(x_0, f(x_0))$ . Кутівий коефіцієнт дотичної —  $f'(x_0)$ , рівняння дотичної  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ . Ця пряма перетинає вісь абсцис при  $y = 0$ , а значення аргументу позначено  $x_1$ .

Тоді замінімо  $x$  на  $x_1$ ,  $y = 0$ , отримаємо рівняння:  $0 = f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0)$ .

$$\text{Розв'яжемо його для } x_1: x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

$$\text{Аналогічно повторимо алгоритм для } x_2 \text{ та } x_1, \text{ отримаємо } x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

У загальному випадку, знаючи наближене значення  $x_n$ , можна знайти наступне наближення  $x_{n+1}$ . Узагальнимо:  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ .

### Алгоритм використання методу Ньютона

Нехай функція  $f(x)$  диференційовна функція на інтервалі  $I$ , який містить корінь рівняння  $f(x) = 0$ . Тоді, щоб знайти наближене значення кореня з точністю до  $d$  знаків після коми потрібно:

1. Оберіть значення  $x_0$  як початкове наближене значення кореня (зазвичай гіпотезу про значення  $x_0$  роблять за графіком функції  $f(x)$ ).

- 2.** Створіть послідовність наближень, маючи наближення  $x_n$ , обчисліть наступне наближення  $x_{n+1}$ :  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ .
- 3.** Зупиніть процес, якщо отримане наближення буде мати точність  $d$  знаків після коми.

Варто зауважити, що Метод Ньютона не є безпомилковим. Послідовність наближених значень може не збігатися або збігатися настільки повільно, що можна помилково вважати певне наближення точнішим, ніж воно є насправді.

### Ілюстративний приклад

- 8.** Знайдіть наближений дійсний корінь рівняння  $x^3 - x^2 - 1 = 0$  з точністю до шести знаків після коми, використовуючи метод Ньютона та початкове наближення  $x_0 = 1$ .  
*Розв'язання.* Для початку, знайдемо  $f'(x) = 3x^2 - 2x$ . Тоді застосуємо алгоритм методу Ньютона:

$$x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{1^3 - 1^2 - 1}{3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1} = 2,$$

$$x_2 = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{2^3 - 2^2 - 1}{3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2} = 1,625,$$

$$x_3 = 1,625 - \frac{f(1,625)}{f'(1,625)} = 2 - \frac{1,625^3 - 1,625^2 - 1}{3 \cdot 1,625^2 - 2 \cdot 1,625} \approx 1,48579,$$

$$x_4 = 1,48579 - \frac{f(1,48579)}{f'(1,48579)} \approx 1,46596,$$

$$x_5 = 1,46596 - \frac{f(1,46596)}{f'(1,46596)} \approx 1,46557.$$

Було виконано п'ять кроків обчислень, щоб знайти корінь рівняння з точністю до шести знаків після коми.

*Відповідь.* 1,46557.

## V. Умова паралельності прямих

Дві прямі  $y = k_1x + b_1$  і  $y = k_2x + b_2$  паралельні в тому випадку, якщо вони утворюють рівні кути  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  з додатним напрямком осі  $Ox$ .

Тоді  $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2$  або  $k_1 = k_2$ .

Отже, щоб дві прямі були паралельні, необхідно і достатньо, щоб їхні кутові коефіцієнти були рівні.

За геометричним змістом похідної, якщо дотичні прямі, проведені до графіка функції  $f(x)$  у точках  $x_1$  і  $x_2$  — паралельні, то  $f'(x_1) = f'(x_2)$ .

## Ілюстративні приклади (5–6 хв)

9. Знайдіть рівняння дотичної, проведеної до графіка функції  $f(x) = x^2 - x + 3$ , яка паралельна прямій  $x + y + 3 = 0$ .

*Розв'язання.* 1) Запишемо рівняння прямої у вигляді  $y = -x - 3$ , тоді кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції  $f(x) = x^2 - x + 3$ , яка паралельна прямій  $y = -x - 3$ , дорівнює  $-1$ .

2) Знайдемо похідну функції:  $f'(x) = 2x - 1$ .

3) Знайдемо значення похідної функції в довільній точці  $x_0$ :  $f'(x_0) = 2x_0 - 1$ .

4) Оскільки  $f'(x_0) = -1$ , то  $2x_0 - 1 = -1$ , звідси  $x_0 = 0$ .

Отже, дотична проходить через точку з абсцисою  $x_0 = 0$ .

5) Значення функції  $f(x)$  у точці  $x_0 = 0$ :  $f(0) = 3$ .

Тоді рівняння дотичної:  $y = -(x - 0) + 3$ ,  $y = -x + 3$ .

*Відповідь.*  $y = -x + 3$ .

10. Обчисліть площу трикутника, утвореного осями координат і дотичною до графіка функції  $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$  у точці з абсцисою  $x_0 = 3$ .

*Розв'язання.* Знайдемо рівняння дотичної, загальний вигляд якої

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Значення функції у точці  $x_0 = 3$ :  $f(3) = \frac{3+3}{3-2} = 6$ .

Знайдемо похідну функції:  $f'(x) = -\frac{5}{(x-2)^2}$ ,  $f'(3) = -5$ .

Рівняння дотичної:  $y = -5(x - 3) + 6 = -5x + 21$ .

Знайдемо точки перетину дотичної з осями координат.

Вісь ординат пряма  $y = -5x + 21$  перетинає при  $x = 0$ , тобто в точці  $(0; 21)$ .

Вісь абсцис пряма  $y = -5x + 21$  перетинає при  $y = 0$ , тобто в точці  $\left(\frac{21}{5}; 0\right)$  або  $(4,2; 0)$ .

Отже, катети прямокутного трикутника, площу якого треба знайти, дорівнюють

21 і 4,2. Площа прямокутного трикутника:  $S = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot \frac{21}{5} = 44,1$  (кв. од.).

*Відповідь.* 44,1 кв. од.

## VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (8–10 хв)

### Як я вирішую певну проблему?

**Задача.** Автомобіль рухається гірським серпантином — звивистою дорогою, що прокладена вздовж схилу гори. Траєкторія руху автомобіля описується функцією  $s(t) = -0,1t^2 + 12t + 20$ , де  $s(t)$  — відстань, яку подолав автомобіль (у сотнях метрів),  $t$  — час руху (в хвилинали). Оскільки звивиста дорога має багато поворотів, важливо дослідити, який нахил або вигин траєкторії спостерігається за певним поворотом. Кут нахилу траєкторії по відношенню до поверхні землі не повинен перевищувати  $15^\circ$ .

1. У який момент часу автомобіль досягає крайньої верхньої точки маршруту?
2. Яку відстань подолає автомобіль до цієї точки?

3. Складіть рівняння дотичної до графіка функції  $s(t)$  через одну хвилину після повороту у верхній крайній точці.
4. Визначте кут нахилу цієї дотичної. Чи відповідає нахил дотичної дорожнім нормам безпеки?

*Розв'язання.*

1. Оскільки траєкторія руху автомобіля описується квадратичною функцією  $s(t) = -0,1t^2 + 12t + 20$ , а її графік є парабола, напрямлена вітками вниз, то крайня точка маршруту відповідає вершині параболи. Дотична, проведена в цій точці, є паралельною осі  $Ox$ , тому кутовий коефіцієнт цієї дотичної дорівнює нулю.

Щоб знайти цю точку, знайдемо похідну:  $s'(t) = -0,2t + 12$ .

Якщо кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції дорівнює 0, то похідна в точці дотику дорівнює нулю.

Тоді:  $s'(t) = 0$ ,  $-0,2t + 12 = 0$ ,  $t = 60$ .

Отже, автомобіль досягне крайньої точки маршруту через 60 хвилин.

2. Якщо  $t = 60$  хв, то  $s(t) = s(60) = -0,1 \cdot 60^2 + 12 \cdot 60 + 20 = -360 + 720 + 20 = 380$  (сотень метрів). Оскільки  $s(t)$  в сотнях метрів, то:  $380 \cdot 100 = 38\,000$  (м).

Отже, відстань до крайньої верхньої точки маршруту становить 38 км.

3. Складемо рівняння дотичної, яка відповідає умові задачі.

Оскільки поворот у крайній точці маршруту відбувся при  $t = 60$  хв, то через одну хвилину після повороту:  $t_1 = 61$  хв.

Значення функції у точці  $t = 61$ :

$$s(61) = -0,1 \cdot 61^2 + 12 \cdot 61 + 20 = -372,1 + 732 + 20 = 379,9.$$

Значення похідної функції у точці  $t = 61$ :

$$s'(61) = -0,2 \cdot 61 + 12 = -12,2 + 12 = -0,2.$$

Тоді рівняння дотичної у точці  $t = 61$ :  $y = s'(61) \cdot (t - 61) + s(61)$ ,

$$y = -0,2(t - 61) + 379,9 = -0,2t + 12,2 + 379,9 = -0,2t + 392,1.$$

$$y = -0,2t + 392,1.$$

4. Тангенс кута нахилу дотичної по відношенню до поверхні землі:  $\operatorname{tg} \alpha = |k| = 0,2$ .

Кут  $\alpha = \operatorname{arctg}(0,2) \approx 11,5^\circ$ .

Оскільки  $11,5^\circ < 15^\circ$ , то кут нахилу дотичної відповідає нормам безпеки.

*Відповідь.* 1. 60 хв. 2. 38 км. 3.  $y = -0,2t + 392,1$ . 4.  $11,5^\circ$ .

## VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

### Рівень А

1. Для функції  $f(x)$  задано точку  $B(x_0; y_0)$  та значення похідної  $f'(x_0)$ . Запишіть рівняння дотичної, яка проходить через дану точку:

1)  $B(2; 4)$ ,  $f'(2) = 1$ ;

2)  $B(3; 1)$ ,  $f'(3) = 2$ ;

3)  $B(0; -2)$ ,  $f'(0) = 0,5$ ;

4)  $B(-2; -3)$ ,  $f'(-2) = 1,5$ ;

5)  $B(-4; 6)$ ,  $f'(-4) = -2$ ;

6)  $B(-0,5; 3)$ ,  $f'(-0,5) = 0$ .

2. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної в точці  $x_0$ :

1)  $x_0 = \frac{\pi}{4}$ ;

2)  $x_0 = -\frac{3}{2}\pi$ .

- 3.** Запишіть рівняння дотичної, яка проходить через точку з абсцисою  $x_0$ :
- 1)  $f(x) = x^4$ ,  $x_0 = 0,5$ ;
  - 2)  $f(x) = 2x^{-2}$ ,  $x_0 = 3$ ;
  - 3)  $f(x) = 2x^3 - 3x - 2$ ,  $x_0 = 2$ ;
  - 4)  $f(x) = 0,5x^4 + 2$ ,  $x_0 = -2$ .
- 4.** При яких значеннях аргументу  $x$  дотична, проведена до графіка функції, паралельна осі  $Ox$ :
- 1)  $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - 4x + 3$ ;
  - 2)  $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 12$ ;
  - 3)  $f(x) = x(x^4 - 10)$ ;
  - 4)  $f(x) = \sqrt{x} - x$ ?
- 5.** Знайдіть точку перетину дотичної, яка проходить через точку  $A$ , з віссю  $Ox$ :
- 1)  $f(x) = 0,5x^2$ ,  $A(2; f(2))$ ;
  - 2)  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2$ ,  $A(-1; f(-1))$ .
- 6.** Знайдіть рівняння дотичної, проведеної в точці з абсцисою  $x_0$ :
- 1)  $f(x) = \cos x$ ,  $x_0 = \frac{7}{4}\pi$ ;
  - 2)  $f(x) = x + \sin x$ ,  $x_0 = \frac{1}{4}\pi$ .
- 7.** Дано функцію  $f(x) = \sin x + 2$  та пряму  $y = x - 1,14$ . До графіка функції проведено дотичну в точці  $(\pi; f(\pi))$ . Дотична, задана пряма та вісь  $Ox$  утворюють трикутник. Знайдіть його площу.
- 8.** Складіть рівняння дотичної до графіка функції  $f(x)$  у точці з абсцисою  $x_0$ :
- 1)  $f(x) = 2x^3 - 3x$ ,  $x_0 = 1$ ;
  - 2)  $f(x) = \cos x$ ,  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ ;
  - 3)  $f(x) = \sqrt{4x^2 + 3x}$ ,  $x_0 = -1$ ;
  - 4)  $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x - 2}$ ,  $x_0 = 3$ .

### Рівень В

- 1.** Запишіть рівняння дотичної до графіка функції  $f(x)$  у точці перетину графіка з віссю ординат:
- 1)  $f(x) = 2x^3 - 5x + 2$ ;
  - 2)  $f(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ .
- 2.** Складіть рівняння дотичної до графіка функції  $f(x)$  у точці перетину графіка з віссю абсцис:
- 1)  $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ ;
  - 2)  $f(x) = 3x - x^2$ .
- 3.** У яких точках дотичні до графіка функції  $y = \frac{1}{x}$  паралельні прямій  $y = -x$ ?
- 4.** Знайдіть точку на графіку функції  $f(x)$  таку, що дотична, проведена до графіка в цій точці, утворює з додатним напрямком осі абсцис кут  $\alpha$ :
- 1)  $f(x) = \sqrt{3}x - \frac{x^3}{3}$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ;
  - 2)  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ ,  $\alpha = 45^\circ$ .
- 5.** Запишіть рівняння дотичної до графіка функції  $f(x)$  у точці з абсцисою  $x_0$ :
- 1)  $f(x) = \frac{3}{x}$ ,  $x_0 = -1$ ;
  - 2)  $f(x) = 2x - x^2$ ,  $x_0 = 0$ ;
  - 3)  $f(x) = x^2 + 1$ ,  $x_0 = 1$ ;
  - 4)  $f(x) = x^3 - 1$ ,  $x_0 = 2$ .

- 6.** Запишіть рівняння дотичної до графіка функції  $f(x)$  у точці з абсцисою  $x_0$ :
- 1)  $f(x) = 3 \sin x, x_0 = \frac{\pi}{2}$ ;
  - 2)  $f(x) = \operatorname{tg} x, x_0 = \frac{\pi}{4}$ ;
  - 3)  $f(x) = 1 + \cos x, x_0 = 0$ ;
  - 4)  $f(x) = -2 \sin x, x_0 = -\frac{\pi}{2}$ .
- 7.** Знайдіть точки графіка функції  $f(x)$ , в яких дотична паралельна осі абсцис:
- 1)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ ;
  - 2)  $f(x) = 0,5x^4 + 16x$ ;
  - 3)  $f(x) = 3x^4 - 6x^2 + 2$ ;
  - 4)  $f(x) = x^3 - 3x + 1$ .
- 8.** Знайдіть точки графіка функції  $f(x)$ , в яких дотична паралельна осі абсцис:
- 1)  $f(x) = 2 \cos x + x$ ;
  - 2)  $f(x) = \sin 2x + \sqrt{3}x$ ;
  - 3)  $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ;
  - 4)  $f(x) = \sqrt{2}x - 2 \sin x$ .
- 9.** Під яким кутом перетинається з віссю  $Ox$  графік функції:
- 1)  $f(x) = 3x - x^2$ ;
  - 2)  $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ;
  - 3)  $f(x) = x^2 - 3x + 2$ ;
  - 4)  $f(x) = -\cos x$ ?
- 10.** Під яким кутом перетинається з віссю  $Ox$  графік функції:
- 1)  $f(x) = \frac{1}{x-1}$ ;
  - 2)  $f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ;
  - 3)  $f(x) = 0,5(x-1)^2$ ;
  - 4)  $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ ?

### Рівень С

- 1.** Доведіть, що будь-яка дотична до графіка функції  $f(x)$  утворює гострий кут із додатним напрямком осі абсцис:
- 1)  $f(x) = x^5 + 2x - 8$ ;
  - 2)  $f(x) = \frac{4}{1-x}$ .
- 2.** Знайдіть рівняння горизонтальних дотичних до графіка функції
- $$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4.$$
- 3.** Установіть, чи є пряма  $y = 12x - 10$  дотичною до графіка функції  $f(x) = 4x^3$ . У разі позитивної відповіді вкажіть абсцису точки дотику.
- 4.** Обчисліть площу трикутника, утвореного осями координат і дотичною до графіка функції  $f(x) = x^2 - 4$  у точці з абсцисою  $x_0 = -2$ .
- 5.** Обчисліть площу трикутника, утвореного осями координат і дотичною до графіка функції  $f(x) = x^3 + x^2 - 6x + 1$  у точці з абсцисою  $x_0 = 1$ .
- 6.** Знайдіть площу трикутника, утвореного прямою  $y = 2 - x$ , віссю абсцис і дотичною до параболи  $y = 1 + 2x - x^2$  у точці її перетину з віссю ординат.
- 7.** На графіку функції  $f(x) = -\sqrt{2x+1}$  знайдіть точку, в якій дотична до графіка є перпендикулярною до прямої  $y - 2x + 1 = 0$ .
- 8.** При яких значеннях  $b$  і  $c$  парабола  $y = x^2 + bx + c$  дотикається до прямої  $y = 4x + 1$  у точці з абсцисою  $x_0 = 1$ ?

- 10.** Знайдіть наближення до кореня рівнянь з точністю до трьох знаків після коми, використовуючи метод Ньютона. Виконайте щонайменше чотири ітерації:
- 1)  $\cos x = x$ ,  $x_0 = 0,7$ ;                      2)  $x^{0,5} - 3x = 0$ ,  $x_0 = 1$ .

### VIII. Рефлексія (1–2 хв)

- 1) На уроці я дізнався/дізналася . . . . .  
 . . . . .  
 . . . . .
- 2) Мені найбільше запам'яталося . . . . .  
 . . . . .  
 . . . . .
- 3) Для мене було найцікавішим . . . . .  
 . . . . .  
 . . . . .
- 4) Для мене було найскладнішим . . . . .  
 . . . . .  
 . . . . .
- 5) Я припустився/припустилася помилки . . . . .  
 . . . . .  
 . . . . .
- 6) Я хочу повторити, аби краще зрозуміти . . . . .  
 . . . . .  
 . . . . .
- 7) Поради собі до наступного уроку . . . . .  
 . . . . .  
 . . . . .

## Можливі теми проєктів

1. Як нахил дороги впливає на швидкість підйому: дотична в гірській місцевості.
2. Застосування рівняння дотичної в архітектурі.
3. Створення анімації в програмі GeoGebra: дотична як динамічний об'єкт.
4. Дослідження та побудова графіків функцій за допомогою дотичних.

## Список використаної літератури

- 1) Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу: профільний рівень: підручник для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. — Х. : Гімназія, 2018. — 400 с. : іл.
- 2) Колмогоров А. М., Абрамов О. М., Дудніцин Ю. П. та ін. Алгебра і початки аналізу: підручник для 10–11 класів середньої школи / За ред. А. М. Колмогорова. — К. : Освіта, 1994. — 350 с.
- 3) Метод Ньютона // Українська LibreTexts. — Режим доступу: [https://ukrayinska.libretexts.org/Математика/розрахунку/Книга%3A\\_Обчислення\\_\(Арех\)/04%3A\\_Застосування\\_похідної/4.01%3A\\_Метод\\_Ньютона](https://ukrayinska.libretexts.org/Математика/розрахунку/Книга%3A_Обчислення_(Арех)/04%3A_Застосування_похідної/4.01%3A_Метод_Ньютона)