

Урок 16. Урок–практикум. Розв’язування задач на складання рівнянь дотичних, проведених до графіків функцій

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім’я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) повторите означення похідної, властивості дотичної та їхній геометричний зміст;
- 2) навчитеся складати рівняння дотичних до графіків функцій;
- 3) порівняєте два підходи до знаходження рівняння дотичної;
- 4) ознайомитеся з методом лінійного наближення функції в точці;
- 5) навчитеся обчислювати наближені значення функції за допомогою лінійного наближення;
- 6) розв’яжете практичні завдання за рівняннями дотичних.

II. Повторення

1. Знайдіть прискорення тіла, яке рухається за законом $s(t) = t^3 - 2t^2$, у момент часу $t_0 = 2$ с від початку руху.
2. Знайдіть значення похідної у точці x_0 :
 - 1) $y = \frac{x^2}{x+1}, x_0 = 1$;
 - 2) $y = x^2 \sqrt{x}, x_0 = 1$.
3. Знайдіть значення границі:
 - 1) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x)$;
 - 2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.
4. Знайдіть похідну функції:
 - 1) $f(x) = \cos^2 x$;
 - 2) $f(x) = \sin \sqrt{x}$.

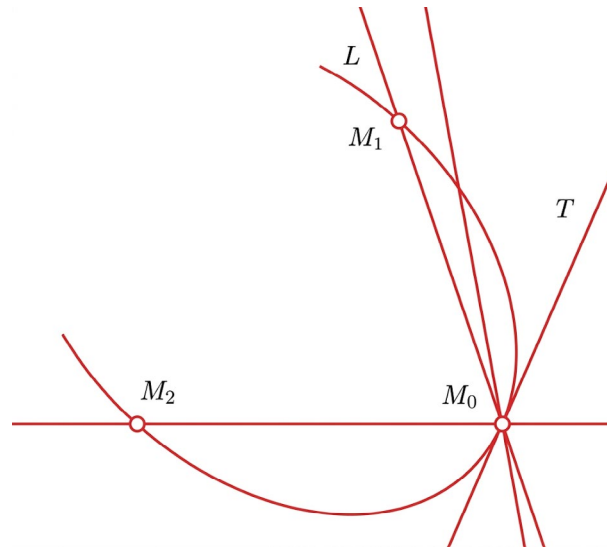
III. Розв'язування задач на складання рівнянь дотичних, проведених до графіків функцій та до графіків кривих ліній, заданих у прямокутній системі координат

Рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ в точці x_0 : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Розглянемо загальне означення дотичної, яке підходило б як до замкнених, так і до незамкнених кривих.

Нехай маємо деяку довільну криву L (див. рисунок).

Візьмемо на цій кривій дві точки M_0 і M_1 і через них проведемо пряму M_0M_1 — січну. Якщо точка M_1 переміщатиметься вздовж кривої, то січна M_0M_1 обертатиметься навколо точки M_0 . Нехай M_1 , рухаючись удовж кривої, наближається до точки M_0 . Тоді довжина відрізка M_1M_0 прямує до нуля, а січна M_0M_1 наближається при цьому до деякої прямої M_0T . Якщо величина кута M_1M_0T прямує до нуля, то пряму M_0T називають граничним положенням січної M_0M_1 .



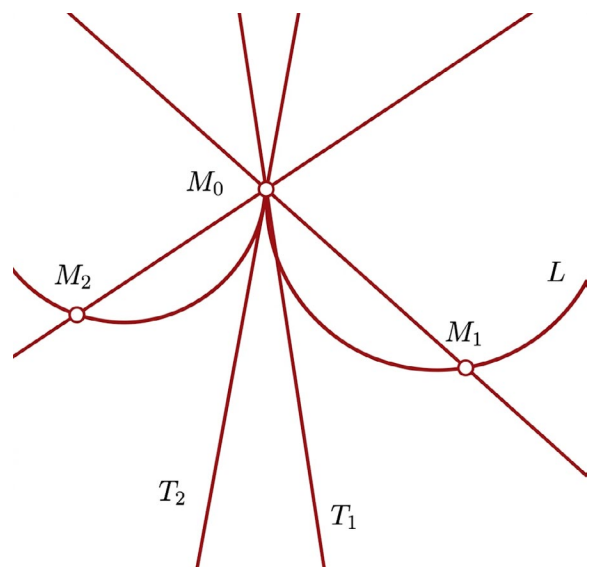
Означення. Дотичною до кривої L у точці M_0 називають граничне положення M_0T січної M_0M_1 , якщо точка M_1 прямує вздовж кривої до точки M_0 .

Зауважимо, що з якого б боку (справа чи зліва) точка M_1 не наближалася вздовж кривої до точки M_0 , січна M_0M_1 при цьому наближається до граничного положення січної. Тільки в цьому випадку деяка крива (графік функції) має в точці M_0 дотичну. Не будь-яка крива в обраній точці має дотичну. Граничного положення січної може не існувати.

Як впливає з рисунку, з якого б боку точка M_1 (а зліва точка M_2) по кривій не прямувала би до точки M_0 , січна M_0M_1 , обертаючись навколо точки M_0 , при цьому наближається до тієї самої прямої M_0T .

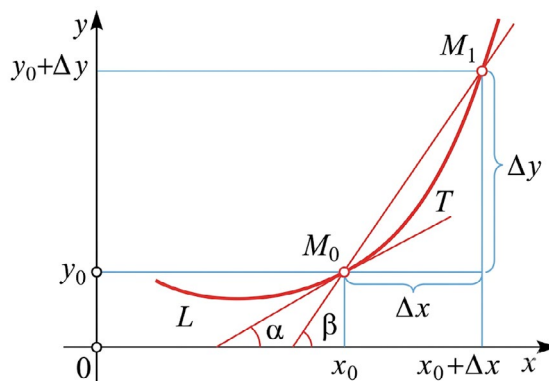
Якщо січна M_0M_1 наближається до різних прямих залежно від того, з якого боку M_1 наближається до M_0 , то кажуть, що в цій точці дотичної до кривої не існує.

Так дотична до кривої L у точці M_0 не існує, тому що коли точка M_1 наближається до M_0 знаходиться справа від M_0 , то січна M_0M_1 наближається до прямої M_0T_1 , а коли M_2 наближається до M_0 і знаходиться зліва, то січна M_2M_0 наближається до прямої M_0T_2 .



Розглянемо випадок, коли графік заданий в декартовій системі координат рівнянням $y = f(x)$, де $f(x)$ — неперервна функція на деякому проміжку $[a; b]$.

Візьмемо на графіку точку $M_0(x_0; y_0)$ і застосуємо наведене вище означення дотичної до цієї кривої в точці M_0 . Зафіксуємо на графіку ще точку M_1 . Позначимо її координати через $x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y$. Через точки M_0 і M_1 проведемо січну M_0M_1 . Кут, який утворює січна M_0M_1 з до-



датним напрямком осі Ox , позначимо через β . Тоді $\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Нехай точка M_1 прямує вздовж графіка до точки M_0 . Тоді координати точки $M_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ наближаються, як завгодно близько, відповідно до координат точки $M_0(x_0, y_0)$, тобто $\lim_{M_1 \rightarrow M_0} (x_0 + \Delta x) = x_0, \lim_{M_1 \rightarrow M_0} (y_0 + \Delta y) = y_0$.

Із співвідношень випливає, що $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$, якщо точка $M_1 \rightarrow M_0$.

Нехай тепер $\Delta x \rightarrow 0$. Тоді й $\Delta y \rightarrow 0$ (внаслідок неперервності функції $f(x)$), а отже, $M_1 \rightarrow M_0$.

Таким чином, у цьому випадку умови $\Delta x \rightarrow 0$ необхідно і достатньо, щоб $M_1 \rightarrow M_0$.

Припустимо, що графік у точці M_0 має дотичну M_0T .

Нехай $\Delta x \rightarrow 0$. Тоді точка M_1 наближається вздовж графіка до точки M_0 , а січна M_0M_1 , обертаючись навколо точки M_0 , наближається до свого граничного положення — прямої M_0T , яка і є дотичною до графіка в точці M_0 .

Позначимо кут, утворений цією дотичною з додатним напрямком осі Ox , через α . Тоді кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює $\operatorname{tg} \alpha$.

Якщо $\Delta x \rightarrow 0$, то кут β прямує до кута α . Отже, внаслідок неперервності тангенса, $\operatorname{tg} \beta \rightarrow \operatorname{tg} \alpha$, проте $\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Отже, маємо співвідношення $\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Таким чином, доведену теорему.

Теорема. Якщо графік функції $y = f(x)$, де функція $f(x)$ є неперервною на проміжку $[a; b]$, має в точці M_0 дотичну, яка не паралельна осі Oy то, кутовий коефіцієнт дотичної визначається співвідношеннями $\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Справедлива і обернена теорема.

Теорема. Якщо існує границя $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k$, то в точці M_0 існує дотична до графіка функції $y = f(x)$ і її кутовий коефіцієнт дорівнює k .

Доведення. Нехай існує границя $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Тоді рівняння прямої можна записати у вигляді $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Дане рівняння задає пряму, що проходить через точку M_0 . Покажемо, що ця пряма і є дотичною до кривої $y = f(x)$ у точці M_0 .

Справді, якщо $\Delta x \rightarrow 0$, то точка M_1 прямує вздовж кривої до точки M_0 , а

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = k.$$

Отже, існує границя кутового коефіцієнта січної $M_0 M_1$ при $\Delta x \rightarrow 0$, яка дорівнює k . Пряма $y - y_0 = k(x - x_0)$, де кутовий коефіцієнт k визначається співвідношенням $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k$, є дотичною в точці M_0 до графіка функції.

Із доведених теорем випливає критерій існування дотичної до графіка функції $y = f(x)$.

Для того, щоб графік функції $y = f(x)$, де функція $f(x)$ є неперервною на проміжку $[a; b]$, мав у точці M_0 дотичну, необхідно і достатньо, щоб існувала границя $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

При виконанні цієї умови пряма $y - y_0 = k(x - x_0)$, в якій k визначається співвідношенням $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k$ і є дотичною до графіка в точці M_0 .

Якщо $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$, то графік функції має в точці M_0 має дотичну, паралельну осі Oy .

Приклад 1. Доведіть, що дотичною до параболи $y = x^2$ у точці $M_0(0; 0)$ є вісь абсцис.

Доведення. Визначимо спочатку кутовий коефіцієнт дотичної, користуючись співвідношеннями $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k$. Для цього знаходимо приріст функції $f(x) = x^2$ у точці $x_0 = 0$. Нагадаємо, що приріст Δy визначається формулою $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, де $\Delta x = x - x_0$ — приріст аргументу. У цьому випадку, $\Delta y = \Delta x^2$.

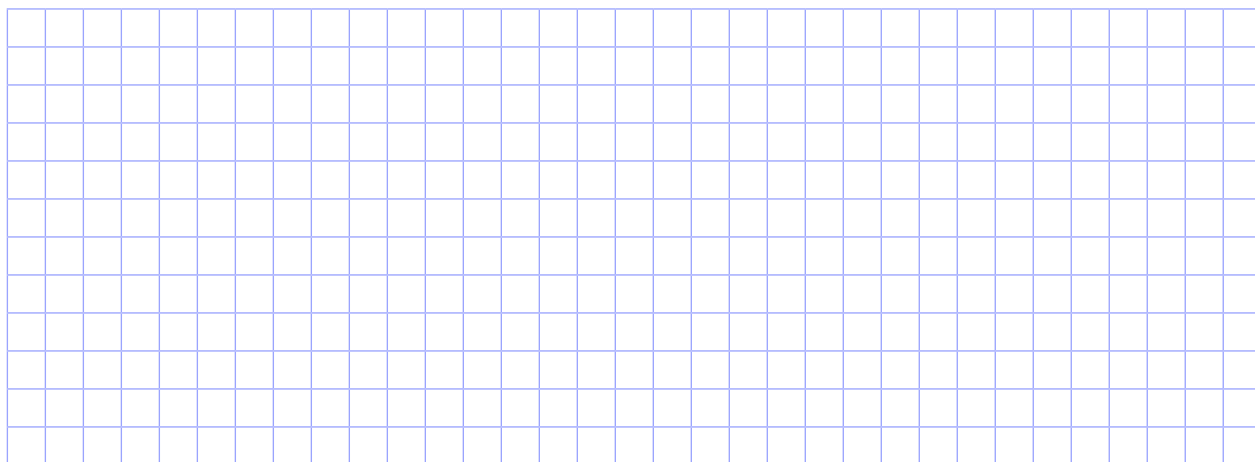
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0.$$

Отже, кутовий коефіцієнт k дотичної до параболи $y = x^2$ у точці $M_0(0; 0)$ існує і дорівнює нулю, тобто $k = 0$.

Підставляючи значення $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $k = 0$, отримуємо рівняння дотичної $y = 0$.

Це рівняння є рівнянням осі абсцис.

Приклад 2. Знайдіть рівняння дотичної до синусоїди $y = \sin x$ у точці $M_0\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$.



IV. Лінійне наближення функції в точці

Розглянемо функцію $f(x)$, яка диференційовна в точці $x = a$. Рівняння дотичної до графіка функції в точці $x_0 = a$ має вигляд $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Наприклад, розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{x}$ при значенні $a = 2$. Оскільки функція

$f(x)$ диференційовна при $x = 2$ і $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, то $f'(2) = -\frac{1}{4}$.

Тому дотична до графіка функції має вигляд $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x - 2)$.

Зауважимо, що при значеннях x , які наближаються до значення $x = 2$, графік дотичної близький до знайденої дотичної. Тобто, ми можемо використовувати рівняння дотичної для значень x наближених до 2.

Наприклад, якщо $x = 2,1$, то значення ординати відповідної точки на дотичній прямій дорівнює $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(2,1 - 2) = 0,475$.

Фактичне значення $f(2,1) = \frac{1}{2,1} \approx 0,47619$.

Тому дотична пряма дає досить точне наближення $f(2,1)$. Однак, варто зауважити, що для значень x далеких від значень абсциси точки дотику не дає достатнього наближення. Наприклад, при $x = 10$, значення відповідної ординати точки $y = -1,5$.

Загалом, для диференційованої функції $f(x)$ рівняння дотичної в точці $x_0 = a$ може бути використано для обчислення наближеного значення $f(x)$ функції при значенні $x = a$. Тому можна записати так: $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$.

Лінійну функцію виду $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ називають лінійним наближенням функції $f(x)$ для $x = a$.

Приклад 3. Знайдіть лінійне наближення функції $f(x) = \sqrt{x}$. З його допомогою знайдіть значення функції в точці $x = 9,1$.

Розв'язання. Оскільки лінійне наближення задається $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$, то знайдемо значення заданої функції при $a = 9$:

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a),$$

$$L(x) = f(9) + f'(9)(x - 9).$$

Знайдемо $f(9)$ і $f'(9)$.

Оскільки $f(x) = \sqrt{x}$, то $f(9) = 3$.

Оскільки $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, то $f'(9) = \frac{1}{6}$.

Тоді лінійне наближення задається функцією $L(x) = 3 + \frac{1}{6}(x - 9)$.

Використовуючи лінійне наближення, знайдемо значення функції $f(x)$ в точці 9,1.

$$L(9,1) = 3 + \frac{1}{6}(9,1 - 9) \approx 3,0167.$$

Відповідь. 3,0167.

Приклад 4. Обчисліть площу трикутника, утвореного осями координат і дотичною до графіка функції $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$ у точці з абсцисою $x_0 = 3$.



V. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У клінічному дослідженні концентрація ліків у крові пацієнта після введення препарату описується функцією $C(t) = -0,5(t-2)^2 + 4$, де $C(t)$ — концентрація препарату (у мг/л), t — час (у годинах). Лікаря потрібно оцінити, як швидко змінюється концентрація ліків через три години від початку їхнього введення, щоб визначити безпечний інтервал між дозами та оцінити ризик перевищення терапевтичного вікна.

- 1) Запишіть рівняння дотичної до графіка $C(t)$ у точці $t_0 = 3$.
- 2) Використайте дотичну для оцінки $C(3,1)$. Це допоможе передбачити концентрацію через 3 години 6 хв після введення препарату.
- 3) Обчисліть площу трикутника, утвореного дотичною та осями координат. Ця площа умовно характеризує “зону можливого коливання концентрації” у дослідженні.
- 4) Поясніть практичне значення лінійного наближення в медицині. Наприклад, як воно допомагає швидко приймати рішення щодо дозування та контролю ефективності препарату.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x)$ у точці з абсцисою x_0 , якщо:
 - 1) $f(x) = x^3 - 27, x_0 = 2$;
 - 2) $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = \frac{1}{2}$;
 - 3) $f(x) = 4\sqrt{x} - 3, x_0 = 9$;
 - 4) $f(x) = \sin x, x_0 = 0$.
2. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x)$ у точці його перетину з віссю ординат:
 - 1) $f(x) = x^2 - 3x - 3$;
 - 2) $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$.

- 3.** Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x)$ у точці його перетину з віссю абсцис:
1) $f(x) = 8x^3 - 1$; 2) $f(x) = x - \frac{1}{x}$.
- 4.** Знайдіть координати точки параболу $y = 2x^2 - x + 1$, у якій дотична до параболу паралельна прямій $y = 7x - 8$.
- 5.** До графіка функції $f(x) = 2\sin x + 3\cos x$ проведено дотичні в точках з абсцисами $x_1 = \frac{\pi}{2}$ і $x_2 = \frac{3\pi}{2}$. Яке взаємне розміщення дотичних?
- 6.** Знайдіть рівняння горизонтальних дотичних до графіка функції:
1) $f(x) = x^3 - 3x + 1$; 2) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 4x^2 + 1$.

Рівень В

- 1.** Складіть рівняння дотичної до графіка функції:
1) $f(x) = x^2 - 5x$, якщо дотична паралельна прямій $y = -x$;
2) $f(x) = x - \frac{1}{x^2}$, якщо дотична паралельна прямій $y = 3x$;
3) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 10x - 1$, якщо дотична паралельна прямій $y = 2x + 1$.
- 2.** Установіть, чи є пряма $y = 12x - 10$ дотичною до графіка функції $f(x) = 4x^3$. У разі ствердної відповіді вкажіть абсцису точки дотику.
- 3.** Знайдіть площу трикутника, обмеженого віссю абсцис, прямою $x = 4$ і дотичною до графіка функції $f(x) = x^2 - 2x + 4$ у точці з абсцисою $x_0 = 4$.
- 4.** При яких значеннях a і b пряма $y = 7x - 2$ дотикається до параболи $y = ax^2 + bx + 1$ у точці $A(1; 5)$?
- 5.** Парабола з вершиною на осі абсцис дотикається до прямої, яка проходить через точки $A(1; 2)$ і $B(2; 4)$, у точці B . Знайдіть рівняння параболи.
- 6.** Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = -2x^4 + 1$, якщо дотична проходить через точку $M\left(-\frac{5}{4}; 17\right)$.

Рівень С

1. Знайдіть лінійне наближення функції $f(x) = \sqrt[3]{x}$ у точці $x = 8$. Використайте його, щоб наблизити значення $\sqrt[3]{8,1}$ з точністю до п'яти десяткових знаків.
2. Знайдіть лінійне наближення функції $f(x) = \sin x$ в точці $x = \frac{\pi}{3}$ і використайте його для знаходження значення $\sin 62^\circ$.
3. Функція $g(x)$ є обернена до функції $f(x) = x^5 + 3x - 1$. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $g(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 3$.
4. Скільки розв'язків має система рівнянь
$$\begin{cases} y = x^4, \\ y + 8 = a \left(x + \frac{5}{4} \right) \end{cases}$$
 залежно від значення параметра a ?

5. Дві перпендикулярні дотичні до графіка функції $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x^2$ перетинаються в точці A , яка належить осі ординат. Знайдіть координати точки A .
6. Похідна функції $y = f(x)$ у точці x_0 задовольняє рівняння $(f'(x))^2 + 10f'(x) - a = 0$. При якому значенні параметра a дотична, проведена до графіка функції $y = f(x)$ у точці x_0 , буде нахилена до осі абсцис під кутом 45° ?

Рефлексія

Запропонуйте учням оцінити розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Жахливі									Чудові

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

- 1)
- 2)
- ?

Можливі теми проєктів

1. Дотична як модель миттєвої швидкості руху.
2. Використання дотичних у графічному дизайні та моделюванні.
3. Обчислення площ фігур, обмежених дотичною до графіка функції та осями координат. Практичне застосування.
4. Метод дотичних (Ньютона) для знаходження коренів рівнянь.
5. Дослідження оптимальних форм у задачах оптимізації за допомогою похідної.
6. Створення інтерактивної розробки в GeoGebra про дотичні й лінійні наближення.







