

Урок 16. Урок–практикум. Розв’язування задач на складання рівнянь дотичних, проведених до графіків функцій

Тип уроку: застосування знань, умінь і навичок.

План уроку

1. Повторення.
2. Розв’язування задач на складання рівнянь дотичних, проведених до графіків функцій та кривих.
3. Лінійне наближення функції в точці.
4. Обчислення площ фігур, обмежених дотичними та осями координат.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

вирізняє специфічні проблемні ситуації, які можуть бути розв’язані математичними методами [12 МАО 1.1.1–1 П];

сприймає інформацію математичного змісту в декількох формах [12 МАО 2.1.1–1 П];

самостійно або у співпраці з іншими визначає суттєві дані в специфічній проблемній ситуації, достовірність їх [12 МАО 3.1.1–1 П];

пов’язує різні математичні знання і вміння, узагальнює їх, робить висновки [12 МАО 4.1.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Запропонуйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді давати поступово у процесі викладення матеріалу.
- 2) Повторіть основні поняття попереднього уроку, розв’яжіть 2–3 приклади на повторення (обирайте на власний розсуд).
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв’язання). Розв’язання пропонуйте у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) Подавайте теорію стисло, за можливості акцентуйте увагу на її практичному застосуванні.

- 5) Включайте доведення тверджень у роботу учнів/учениць.
- 6) До кожного теоретичного твердження добирайте кілька ілюстративних прикладів. Обирайте їх на свій розсуд.
- 7) Увесь запропонований матеріал неможливо опрацювати протягом одного уроку, тому добирайте обсяг відповідно до часу та потреб учнів/учениць.
- 8) Наприкінці уроку поверніться до практичних задач, сформульованих на початку. Об'єднайте учнів/учениць у групи. Під час групової роботи важливо формувати комунікаційні навички, вміння співпрацювати та застосовувати набуті знання для розв'язання практичних задач.
- 9) Формуйте навички розв'язання прикладів та задач. Запропонуйте тренувальні вправи трьох рівнів складності, на вибір учня/учениці.
- 10) Акцентуйте увагу учнів/учениць на важливості створення проєктів як альтернативи контрольної роботи з теми. Запропонуйте обрати індивідуальні або групові теми.

I. Організаційна частина (3–4 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Як знайти площу фігури, яка утворена дотичною і осями координат? Для чого це може знадобитись у фізиці чи економіці?
- 2) Як одна дотична може дати нам інформацію про зростання, спадання чи вигин кривої?
- 3) Чи можна за допомогою рівняння дотичної передбачити, як змінюється сама функція?

II. Повторення (3–4 хв)

- 1.** Знайдіть прискорення тіла, яке рухається за законом $s(t) = t^3 - 2t^2$, у момент часу $t_0 = 2$ с від початку руху.
Відповідь. 8 м/с^2 .
- 2.** Знайдіть значення похідної у точці x_0 :
1) $y = \frac{x^2}{x+1}, x_0 = 1$; 2) $y = x^2\sqrt{x}, x_0 = 1$.
Відповідь. 1) $0,75$; 2) $2,5$.
- 3.** Знайдіть значення границі:
1) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x)$; 2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.
Відповідь. 1) 8 ; 2) 4 .
- 4.** Знайдіть похідну функції:
1) $f(x) = \cos^2 x$; 2) $f(x) = \sin \sqrt{x}$.
Відповідь. 1) $f'(x) = -2\sin(2x)$; 2) $f'(x) = \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У клінічному дослідженні концентрація ліків у крові пацієнта після введення препарату описується функцією $C(t) = -0,5(t - 2)^2 + 4$, де $C(t)$ — концентрація препарату (у мг/л), t — час (у годинах). Лікаря потрібно оцінити, як швидко змінюється концентрація ліків через три години від початку їхнього введення, щоб визначити безпечний інтервал між дозами та оцінити ризик перевищення терапевтичного вікна.

- 1) Запишіть рівняння дотичної до графіка $C(t)$ у точці $t_0 = 3$.
- 2) Використайте дотичну для оцінки $C(3,1)$. Це допоможе передбачити концентрацію через 3 години 6 хв після введення препарату.
- 3) Обчисліть площу трикутника, утвореного дотичною та осями координат. Ця площа умовно характеризує “зону можливого коливання концентрації” у дослідженні.
- 4) Поясніть практичне значення лінійного наближення в медицині. Наприклад, як воно допомагає швидко приймати рішення щодо дозування та контролю ефективності препарату.

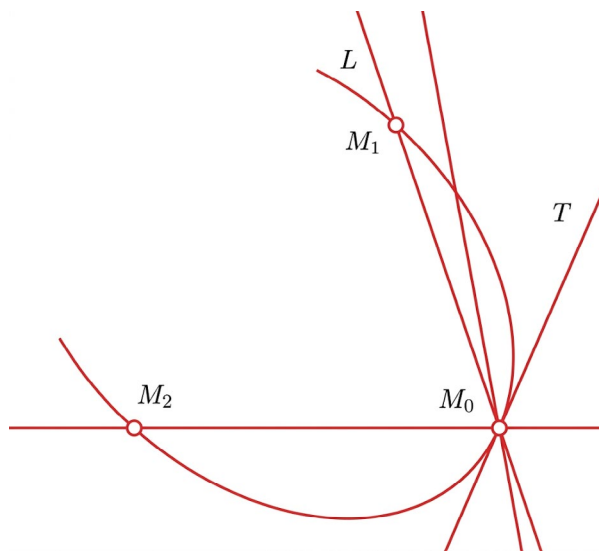
III. Розв’язування задач на складання рівнянь дотичних, проведених до графіків функцій та до графіків кривих ліній, заданих у прямокутній системі координат

Рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ в точці x_0 : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Розглянемо загальне означення дотичної, яке підходило б як до замкнених, так і до незамкнених кривих.

Нехай маємо деяку довільну криву L (див. рисунок).

Візьмемо на цій кривій дві точки M_0 і M_1 і через них проведемо пряму M_0M_1 — січну. Якщо точка M_1 переміщатиметься вздовж кривої, то січна M_0M_1 обертатиметься навколо точки M_0 . Нехай M_1 , рухаючись удовж кривої, наближається до точки M_0 . Тоді довжина відрізка M_1M_0 прямує до нуля, а січна M_0M_1 наближається при цьому до деякої прямої M_0T . Якщо величина кута M_1M_0T прямує до нуля, то пряму M_0T називають граничним положенням січної M_0M_1 .



Означення. Дотичною до кривої L у точці M_0 називають граничне положення M_0T січної M_0M_1 , якщо точка M_1 прямує вздовж кривої до точки M_0 .

Зауважимо, що з якого б боку (справа чи зліва) точка M_1 не наближалася вздовж кривої до точки M_0 , січна M_0M_1 при цьому наближається до граничного положення січної. Тільки в цьому випадку деяка крива (графік функції) має в точці M_0 дотичну. Не будь-яка крива в обраній точці має дотичну. Граничного положення січної може не існувати.

Як випливає з рисунку, з якого б боку точка M_1 (а зліва точка M_2) по кривій не прямувала би до точки M_0 , січна M_0M_1 , обертаючись навколо точки M_0 , при цьому наближається до тієї самої прямої M_0T .

Якщо січна M_0M_1 наближається до різних прямих залежно від того, з якого боку M_1 наближається до M_0 , то кажуть, що в цій точці дотичної до кривої не існує.

Так дотична до кривої L у точці M_0 не існує, тому що коли точка M_1 наближається до M_0 знаходиться справа від M_0 , то січна M_0M_1 наближається до прямої M_0T_1 , а коли M_2 наближається до M_0 і знаходиться зліва, то січна M_2M_0 наближається до прямої M_0T_2 .

Розглянемо випадок, коли графік заданий в декартовій системі координат рівнянням $y = f(x)$, де $f(x)$ — неперервна функція на деякому проміжку $[a; b]$.

Візьмемо на графіку точку $M_0(x_0; y_0)$ і застосуємо наведене вище означення дотичної до цієї кривої в точці M_0 . Зафіксуємо на графіку ще точку M_1 . Позначимо її координати через $x_0 + \Delta x$, $y_0 + \Delta y$. Через точки M_0 і M_1 проведемо січну M_0M_1 . Кут, який утворює січна M_0M_1 з до-

датним напрямком осі Ox , позначимо через β . Тоді $\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Нехай точка M_1 прямує вздовж графіка до точки M_0 . Тоді координати точки $M_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ наближаються, як завгодно близько, відповідно до координат точки $M_0(x_0, y_0)$, тобто $\lim_{M_1 \rightarrow M_0} (x_0 + \Delta x) = x_0$, $\lim_{M_1 \rightarrow M_0} (y_0 + \Delta y) = y_0$.

Із співвідношень випливає, що $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, якщо точка $M_1 \rightarrow M_0$.

Нехай тепер $\Delta x \rightarrow 0$. Тоді й $\Delta y \rightarrow 0$ (внаслідок неперервності функції $f(x)$), а отже, $M_1 \rightarrow M_0$.

Таким чином, у цьому випадку умови $\Delta x \rightarrow 0$ необхідно і достатньо, щоб $M_1 \rightarrow M_0$.

Припустимо, що графік у точці M_0 має дотичну M_0T .

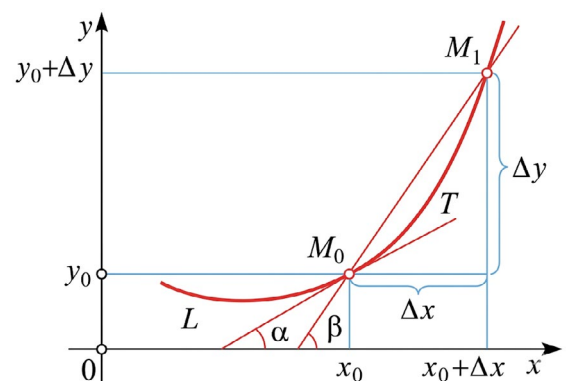
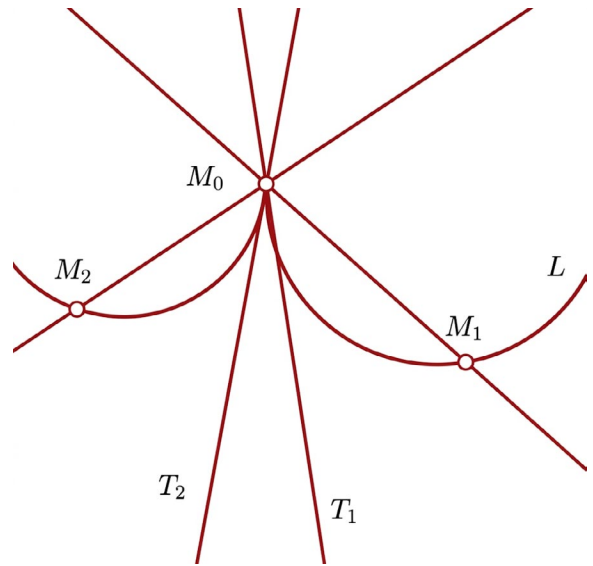
Нехай $\Delta x \rightarrow 0$. Тоді точка M_1 наближається вздовж графіка до точки M_0 , а січна M_0M_1 , обертаючись навколо точки M_0 , наближається до свого граничного положення — прямої M_0T , яка і є дотичною до графіка в точці M_0 .

Позначимо кут, утворений цією дотичною з додатним напрямком осі Ox , через α . Тоді кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює $\operatorname{tg} \alpha$.

Якщо $\Delta x \rightarrow 0$, то кут β прямує до кута α . Отже, внаслідок неперервності тангенса, $\operatorname{tg} \beta \rightarrow \operatorname{tg} \alpha$, проте $\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Отже, маємо співвідношення $\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Таким чином, доведено теорему.



Теорема. Якщо графік функції $y = f(x)$, де функція $f(x)$ є неперервною на проміжку $[a; b]$, має в точці M_0 дотичну, яка не паралельна осі Oy то, кутовий коефіцієнт дотичної визначається співвідношеннями $\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Справедлива і обернена теорема.

Теорема. Якщо існує границя $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k$, то в точці M_0 існує дотична до графіка функції $y = f(x)$ і її кутовий коефіцієнт дорівнює k .

Доведення. Нехай існує границя $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Тоді рівняння прямої можна записати у вигляді $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Дане рівняння задає пряму, що проходить через точку M_0 . Покажемо, що ця пряма і є дотичною до кривої $y = f(x)$ у точці M_0 .

Справді, якщо $\Delta x \rightarrow 0$, то точка M_1 прямує вздовж кривої до точки M_0 , а

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = k.$$

Отже, існує границя кутового коефіцієнта січної $M_0 M_1$ при $\Delta x \rightarrow 0$, яка дорівнює k . Пряма $y - y_0 = k(x - x_0)$, де кутовий коефіцієнт k визначається співвідношенням $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k$, є дотичною в точці M_0 до графіка функції.

Із доведених теорем випливає критерій існування дотичної до графіка функції $y = f(x)$.

Для того, щоб графік функції $y = f(x)$, де функція $f(x)$ є неперервною на проміжку $[a; b]$, мав у точці M_0 дотичну, необхідно і достатньо, щоб існувала границя $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

При виконанні цієї умови пряма $y - y_0 = k(x - x_0)$, в якій k визначається співвідношенням $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k$ і є дотичною до графіка в точці M_0 .

Якщо $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$, то графік функції має в точці M_0 має дотичну, паралельну осі Oy .

Ілюстративні приклади

5. Доведіть, що дотичною до параболи $y = x^2$ у точці $M_0(0; 0)$ є вісь абсцис.

Доведення. Визначимо спочатку кутовий коефіцієнт дотичної, користуючись спів-

відношеннями $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k$. Для цього знаходимо приріст функції $f(x) = x^2$ у точці $x_0 = 0$. Нагадаємо, що приріст Δy визначається формулою $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, де $\Delta x = x - x_0$ — приріст аргументу. У цьому випадку, $\Delta y = \Delta x^2$.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0.$$

Отже, кутовий коефіцієнт k дотичної до параболи $y = x^2$ у точці $M_0(0; 0)$ існує і дорівнює нулю, тобто $k = 0$.

Підставляючи значення $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $k = 0$, отримуємо рівняння дотичної $y = 0$.

Це рівняння є рівнянням осі абсцис.

6. Знайдіть рівняння дотичної до синусоїди $y = \sin x$ у точці $M_0\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$.

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі, знайдемо спочатку кутовий коефіцієнт дотичної, користуючись співвідношенням $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k$.

Для цього знайдемо $\Delta y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right) - \sin \frac{\pi}{2} = -2 \sin^2 \frac{\Delta x}{2}$.

$$\text{Тоді } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2 \sin^2 \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}.$$

Знайдемо границю цього відношення при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(-\frac{2 \sin^2 \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{-\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \sin \frac{\Delta x}{2} \right) = 0.$$

Отже, кутовий коефіцієнт k дотичної до синусоїди в точці $M_0\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ існує і дорівнює нулю, $k = 0$. Підставивши значення $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $y_0 = 1$, $k = 0$ у рівняння дотичної матимемо $y - 1 = 0$, тобто пряма $y = 1$ є дотичною до синусоїди $y = \sin x$ у точці $M_0\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$.

Відповідь. $y = 1$.

IV. Лінійне наближення функції в точці

Розглянемо функцію $f(x)$, яка диференційовна в точці $x = a$. Рівняння дотичної до графіка функції в точці $x_0 = a$ має вигляд $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Наприклад, розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{x}$ при значенні $a = 2$. Оскільки функція

$f(x)$ диференційовна при $x = 2$ і $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, то $f'(2) = -\frac{1}{4}$.

Тому дотична до графіка функції має вигляд $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x - 2)$.

Зауважимо, що при значеннях x , які наближаються до значення $x = 2$, графік дотичної близький до знайденої дотичної. Тобто, ми можемо використовувати рівняння дотичної для значень x наближених до 2.

Наприклад, якщо $x = 2,1$, то значення ординати відповідної точки на дотичній прямій дорівнює $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(2,1 - 2) = 0,475$.

Фактичне значення $f(2,1) = \frac{1}{2,1} \approx 0,47619$.

Тому дотична пряма дає досить точне наближення $f(2,1)$. Однак, варто зауважити, що для значень x далеких від значень абсциси точки дотику не дає достатнього наближення. Наприклад, при $x = 10$, значення відповідної ординати точки $y = -1,5$.

Загалом, для диференційованої функції $f(x)$ рівняння дотичної в точці $x_0 = a$ може бути використано для обчислення наближеного значення $f(x)$ функції при значенні $x = a$. Тому можна записати так: $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$.

Лінійну функцію виду $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ називають лінійним наближенням функції $f(x)$ для $x = a$.

Ілюстративні приклади

- 7.** Знайдіть лінійне наближення функції $f(x) = \sqrt{x}$. З його допомогою знайдіть значення функції в точці $x = 9,1$.

Розв'язання. Оскільки лінійне наближення задається $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$, то знайдемо значення заданої функції при $a = 9$:

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a),$$

$$L(x) = f(9) + f'(9)(x - 9).$$

Знайдемо $f(9)$ і $f'(9)$.

Оскільки $f(x) = \sqrt{x}$, то $f(9) = 3$.

Оскільки $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, то $f'(9) = \frac{1}{6}$.

Тоді лінійне наближення задається функцією $L(x) = 3 + \frac{1}{6}(x - 9)$.

Використовуючи лінійне наближення, знайдемо значення функції $f(x)$ в точці $9,1$.

$$L(9,1) = 3 + \frac{1}{6}(9,1 - 9) \approx 3,0167.$$

Відповідь. 3,0167.

- 8.** Обчисліть площу трикутника, утвореного осями координат і дотичною до графіка функції $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$ у точці з абсцисою $x_0 = 3$.

Розв'язання. Знайдемо рівняння дотичної, загальний вигляд якої

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

1) Значення функції в точці $x_0 = 3$: $f(3) = \frac{3+3}{3-2} = 6$.

2) Знайдемо похідну функції $f'(x) = -\frac{5}{(x-2)^2}$. Тоді $f'(3) = -5$.

3) Рівняння дотичної: $y = -5(x - 3) + 6 = -5x + 21$.

4) Знайдемо точки перетину дотичної з осями координат.

Вісь ординат пряма $y = -5x + 21$ перетинає в точці $(0; 21)$.

Вісь абсцис пряма $y = -5x + 21$ перетинає в точці $\left(\frac{21}{5}; 0\right)$.

Отже, катети прямокутного трикутника, площу якого треба знайти, дорівнюють 21 і $\frac{21}{5}$. Оскільки площа прямокутного трикутника дорівнює половині добутку

його катетів, тобто $S = \frac{1}{2}ab$, то $S = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot \frac{21}{5} = 44,1$ (кв. од.).

Відповідь. 44,1 кв. од.

V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (8–10 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У клінічному дослідженні концентрація ліків у крові пацієнта після введення препарату описується функцією $C(t) = -0,5(t - 2)^2 + 4$, де $C(t)$ — концентрація препарату (у мг/л), t — час (у годинах). Лікаря потрібно оцінити, як швидко змінюється концентрація ліків через три години від початку їхнього введення, щоб визначити безпечний інтервал між дозами та оцінити ризик перевищення терапевтичного вікна.

- 1) Запишіть рівняння дотичної до графіка $C(t)$ у точці $t_0 = 3$.
- 2) Використайте дотичну для оцінки $C(3,1)$. Це допоможе передбачити концентрацію через 3 години 6 хв після введення препарату.
- 3) Обчисліть площу трикутника, утвореного дотичною та осями координат. Ця площа умовно характеризує “зону можливого коливання концентрації” у дослідженні.
- 4) Поясніть практичне значення лінійного наближення в медицині. Наприклад, як воно допомагає швидко приймати рішення щодо дозування та контролю ефективності препарату.

Розв'язання. 1) Запишемо рівняння дотичної до графіка $C(t)$.

Знайдемо похідну $C'(t)$: $C'(t) = -0,5 \cdot 2(t - 2) = -(t - 2)$.

Знайдемо кутовий коефіцієнт дотичної: $k = C'(t_0) = -(3 - 2) = -1$.

Отже, дотична в точці $t = 3$ має кутовий коефіцієнт $k = -1$.

Знайдемо значення функції $C(t)$ при $t_0 = 3$: $C(3) = -0,5(3 - 2)^2 + 4 = 3,5$.

Тоді, рівняння дотичної матиме вигляд $y = C'(t)(t - t_0) + C(t)$. Тобто

$$y = -1(t - 3) + 3,5 = -t + 3 + 3,5 = -t + 6,5.$$

2) Знайдемо значення дотичної в точці $t_0 = 3,1$.

$$y(3,1) = -3,1 + 6,5 = 3,4.$$

Отже, приблизно через 6 хв концентрація препарату становить $C \approx 3,4$ мг/л.

3) Дотична $y = -t + 6,5$ має перетин з віссю абсцис перетин у точці $(6,5; 0)$.

З віссю Oy — у точці $(0; 6,5)$. Отже, дотична утворює з осями координат прямокутний рівнобедрений трикутник з катетом 6,5.

$$\text{Тоді, } S = \frac{1}{2} \cdot 6,5 \cdot 6,5 = 21,125 \text{ (кв. од.)}.$$

4) Дотична показує миттєву швидкість зміни концентрації. Використання лінійного наближення дозволяє швидко прогнозувати концентрацію без додаткових вимірювань. Це допомагає лікарю коригувати інтервал між дозами ліків та оцінити ризик перевищення терапевтичного вікна.

Відповідь. 1) $y = -t + 6,5$; 2) 3,4 мг/л; 3) 21,125 кв. од.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

- Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x)$ у точці з абсцисою x_0 , якщо:
1) $f(x) = x^3 - 27, x_0 = 2;$ 2) $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = \frac{1}{2};$
3) $f(x) = 4\sqrt{x} - 3, x_0 = 9;$ 4) $f(x) = \sin x, x_0 = 0.$
- Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x)$ у точці його перетину з віссю ординат:
1) $f(x) = x^2 - 3x - 3;$ 2) $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right).$
- Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x)$ у точці його перетину з віссю абсцис:
1) $f(x) = 8x^3 - 1;$ 2) $f(x) = x - \frac{1}{x}.$
- Знайдіть координати точки параболи $y = 2x^2 - x + 1$, у якій дотична до параболи паралельна прямій $y = 7x - 8$.
- До графіка функції $f(x) = 2\sin x + 3\cos x$ проведено дотичні в точках з абсцисами $x_1 = \frac{\pi}{2}$ і $x_2 = \frac{3\pi}{2}$. Яке взаємне розміщення дотичних?
- Знайдіть рівняння горизонтальних дотичних до графіка функції:
1) $f(x) = x^3 - 3x + 1;$ 2) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 4x^2 + 1.$

Рівень В

- 1.** Складіть рівняння дотичної до графіка функції:
1) $f(x) = x^2 - 5x$, якщо дотична паралельна прямій $y = -x$;
2) $f(x) = x - \frac{1}{x^2}$, якщо дотична паралельна прямій $y = 3x$;
3) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 10x - 1$, якщо дотична паралельна прямій $y = 2x + 1$.
- 2.** Установіть, чи є пряма $y = 12x - 10$ дотичною до графіка функції $f(x) = 4x^3$. У разі ствердної відповіді вкажіть абсцису точки дотику.
- 3.** Знайдіть площу трикутника, обмеженого віссю абсцис, прямою $x = 4$ і дотичною до графіка функції $f(x) = x^2 - 2x + 4$ у точці з абсцисою $x_0 = 4$.
- 4.** При яких значеннях a і b пряма $y = 7x - 2$ дотикається до параболи $y = ax^2 + bx + 1$ у точці $A(1; 5)$?
- 5.** Парабола з вершиною на осі абсцис дотикається до прямої, яка проходить через точки $A(1; 2)$ і $B(2; 4)$, у точці B . Знайдіть рівняння параболи.
- 6.** Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = -2x^4 + 1$, якщо дотична проходить через точку $M\left(-\frac{5}{4}; 17\right)$.

Рівень С

1. Знайдіть лінійне наближення функції $f(x) = \sqrt[3]{x}$ у точці $x = 8$. Використайте його, щоб наблизити значення $\sqrt[3]{8,1}$ з точністю до п'яти десяткових знаків.
2. Знайдіть лінійне наближення функції $f(x) = \sin x$ в точці $x = \frac{\pi}{3}$ і використайте його для знаходження значення $\sin 62^\circ$.
3. Функція $g(x)$ є обернена до функції $f(x) = x^5 + 3x - 1$. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $g(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 3$.
4. Скільки розв'язків має система рівнянь
$$\begin{cases} y = x^4, \\ y + 8 = a\left(x + \frac{5}{4}\right) \end{cases}$$
 залежно від значення параметра a ?
5. Дві перпендикулярні дотичні до графіка функції $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x^2$ перетинаються в точці A , яка належить осі ординат. Знайдіть координати точки A .
6. Похідна функції $y = f(x)$ у точці x_0 задовольняє рівняння $(f'(x))^2 + 10f'(x) - a = 0$. При якому значенні параметра a дотична, проведена до графіка функції $y = f(x)$ у точці x_0 , буде нахилена до осі абсцис під кутом 45° ?

VII. Рефлексія (1–2 хв)

Запропонуйте учням оцінити розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Жахливі									Чудові

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

- 1)
-
-
- 2)
-
-
- ?
-
-

Можливі теми проєктів

1. Дотична як модель миттєвої швидкості руху.
2. Використання дотичних у графічному дизайні та моделюванні.
3. Обчислення площ фігур, обмежених дотичною до графіка функції та осями координат. Практичне застосування.
4. Метод дотичних (Ньютона) для знаходження коренів рівнянь.
5. Дослідження оптимальних форм у задачах оптимізації за допомогою похідної.
6. Створення інтерактивної розробки в GeoGebra про дотичні й лінійні наближення.

Список використаної літератури

- 1) Ярмак В. О., Резуненко В. О., Панченко І. І. Збірник завдань у тестовій формі. Алгебра та початки аналізу. 10 клас. Профільний рівень. Харків: Вид. група «Основа», 2018. 96 с. (Б-ка журн. «Математика в школах України»; Вип. 7 (187)).
- 2) Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу: початок вивчення на поглибленому рівні з 8 кл., профільний рівень: підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія, 2018. 512 с.