

Урок 17. Узагальнення та систематизація знань

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) узагальните та систематизуєте основні означення і властивості похідної функції;
- 2) навчитеся обчислювати похідну різними способами (за означенням, за правилами, за графіком);
- 3) повторите й закріпите вміння складати рівняння дотичної до графіка функції в заданій точці;
- 4) використаєте похідну для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Знайдіть похідну функції $f(x) = 3x^5(1 - x^2)$.
2. Обчисліть значення похідної функції $f(x)$ у точці $x_0 = 4$, якщо $f(x) = \frac{x+12}{3x}$.
3. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^4 + x^2$ у точці $x_0 = -2$.

III. Поняття похідної

Порівнюючи значення функцій $f(x)$ у деякій фіксованій точці x_0 із значеннями цієї функції в різних точках x , що лежать в околі x_0 , зручно виражати різницю $f(x) - f(x_0)$ через різницю $x - x_0$, користуючись поняттям «приріст аргументу» і «приріст функції».

Різниця $x - x_0$ називаються **приростом незалежної змінної** (або приростом аргументу) в точці x_0 і позначається Δx (читається «дельта ікс»).

Отже, $\Delta x = x - x_0$, звідки $x = x_0 + \Delta x$.

Говорять також, що початкове значення аргументу x_0 отримало приріст Δx . Унаслідок цього, значення функції $f(x)$ зміниться на величину $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Ця різниця називається **приростом функції** $f(x)$ у точці x_0 , що відповідає приросту Δx , і позначається символом Δf (читається «дельта еф»), тобто, за означенням $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, звідки $f(x) = f(x_0) + \Delta f$.

Δf називаються також **приростом залежності змінної** і позначають через Δy для функції $y = f(x)$.

У прямокутній системі координат побудуємо графік довільної функції $y = f(x)$.

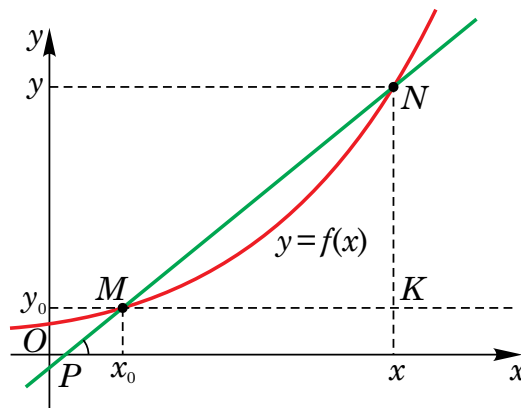
На графіку зафіксуємо дві точки $M(x_0; y_0)$ і $N(x; y)$ так, що точка M є нерухомою, а точка N може рухатись по графіку функції $y = f(x)$.

Отже, координати точки $N(x; y)$ змінюються при її русі по графіку функції до точки $M(x_0; y_0)$. Оскільки $\Delta x = x - x_0$, то абсциса точки N визначається як $x = x_0 + \Delta x$.

Зміна ординати точки N визначається як різниця $y - y_0$ або $f(x) - f(x_0)$, яка називається приростом функції у точці x_0 , що відповідає приросту аргументу Δx і позначається Δf . Отже, $\Delta f = f(x) - f(x_0)$.

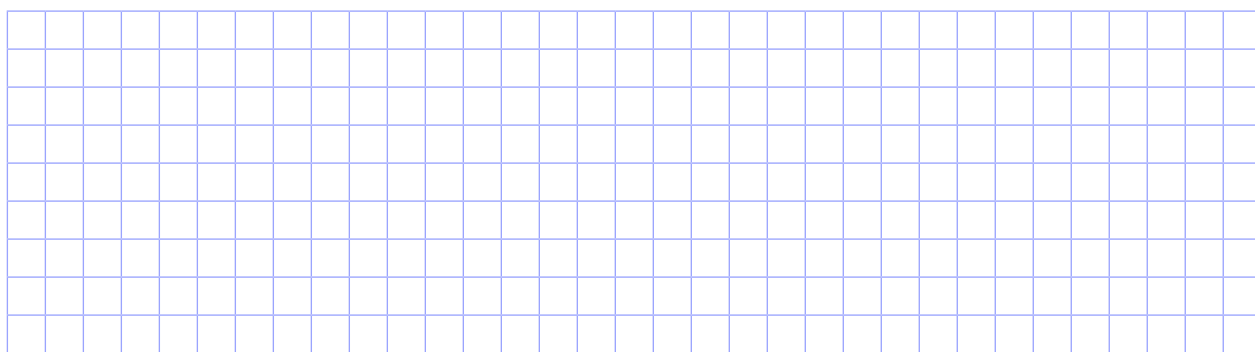
Оскільки $x = x_0 + \Delta x$, то $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Відношення $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ називають **різницеvim відношенням приросту функції до приросту аргументу**.



Означення. Якщо існує границя відношення приросту функції Δf до приросту аргументу Δx за умови, що Δx прямує до нуля, тобто $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, то цю границю називають **похідною функції** $f(x)$ у точці $x = x_0$ і позначають $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0)$.

Приклад 1. За означенням, знайдіть похідну функції $y = \sqrt[3]{x}$.



IV. Фізичний зміст похідної

Якщо точка рухається по прямій і відома її координата руху $x(t)$, то середня швидкість руху тіла за проміжок часу $[t_0; t_0 + \Delta t]$ визначається так:

$$v_c(\Delta t) = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}.$$

Швидкість тіла в момент часу t називається миттєвою швидкістю руху тіла.

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}.$$

Отже, миттєва швидкість руху тіла — відношення приросту функції, яка задає траєкторію руху до приросту часу. Тому похідна від функції, яка задає рівняння руху тіла в деякий момент часу t_0 — $y = x^2 - |5x - 1|$ це миттєва швидкість руху тіла: $v(t_0) = s'(t_0)$.

Швидкість зміни швидкості називають **прискорення** руху тіла ($a(t)$).

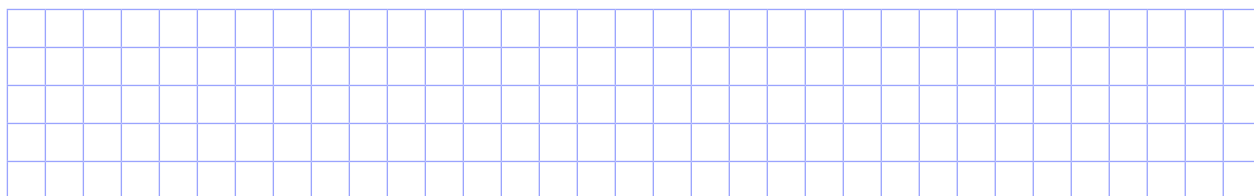
У загальному випадку матеріальна точка рухається нерівномірно, а отже, її швидкість змінюється за модулем і за напрямом. Такий рух називають змінним і характеризують прискоренням.

Середнім прискоренням за проміжок часу Δt називають відношення зміни швидкості до проміжку часу $a(t) = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

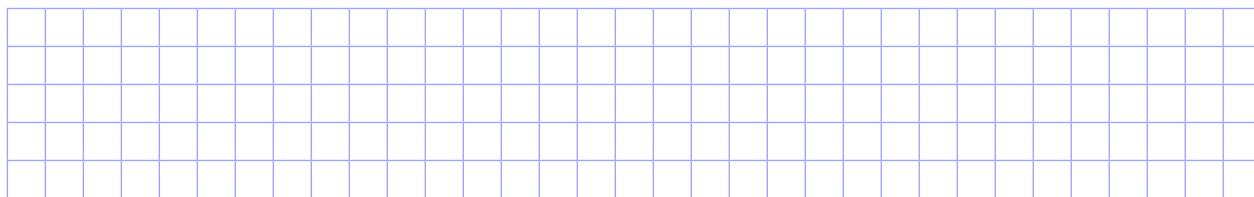
Тоді миттєве прискорення (або прискорення) визначається границею, до якої прямує середнє прискорення якщо $\Delta t \rightarrow 0$: $a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t}$.

Таким чином, прискорення руху тіла є похідною за часом від швидкості матеріальної точки $a(t) = v'(t)$.

Приклад 2. Знайдіть момент часу, коли прискорення рухомої точки дорівнюватиме 4 м/с^2 , якщо точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = 3t^2 - \frac{9}{t} + 7x$, де $x(t)$ — шлях (у м), t — час (у секундах).



Приклад 3. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $S(t) = t^2 + t + 8$, де S — відстань (у м), t — час (у с). Знайдіть швидкість тіла через 5 с від початку руху.



V. Рівняння дотичної до графіка функції

Дотична до графіка функції в точці x_0 є граничним положенням січної, якщо $\Delta x \rightarrow 0$.

Існування похідної функції в точці x_0 — це існування дотичної до графіка функції у точці $(x_0; f(x_0))$, при цьому кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює похідній функції в точці x_0 , тобто числу $f'(x_0)$. У цьому полягає геометричний зміст похідної.

$$k = f'(x_0) = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Дотична до графіка диференційованої в точці x_0 функції $f(x)$ — це пряма, яка проходить через точку $(x_0; f(x_0))$ і має кутовий коефіцієнт $f'(x_0)$.

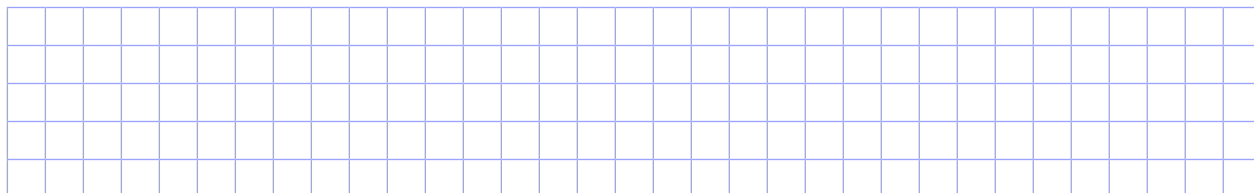
Рівняння дотичної: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Щоб скласти рівняння дотичної, потрібно знати три числа:

- 1) x_0 — абсциса точки дотику.
- 2) $f(x_0)$ — значення функції в точці з абсцисою x_0 .
- 3) $f'(x_0)$ — значення похідної в точці x_0 , або кутовий коефіцієнт дотичної.

Приклад 4. Обчисліть тангенс кута нахилу дотичної до графіка функції $f(x) = x - \frac{1}{3x^2}$

у точці з абсцисою $x_0 = \frac{1}{3}$.



VI. Правила обчислення похідних

Похідні елементарних функцій

Функція	Похідна функція
$y = kx + b$	k
$y = x^n$	$n \cdot x^{n-1}$
$y = \sin x$	$\cos x$
$y = \cos x$	$-\sin x$
$y = \operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$y = \operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$y = \arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$y = \operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Правила обчислення похідних

1. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовні в точці x_0 , то їхня сума диференційовна в цій точці:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Тобто похідна суми функцій дорівнює сумі похідних.

- 2.** Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовні в точці x_0 , то їхній добуток диференційований у цій точці:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

- 3.** Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовні в точці x_0 і функція $g(x)$ не дорівнює нулю в цій точці, то їхня частка $\frac{f(x)}{g(x)}$ також диференційована в цій точці:

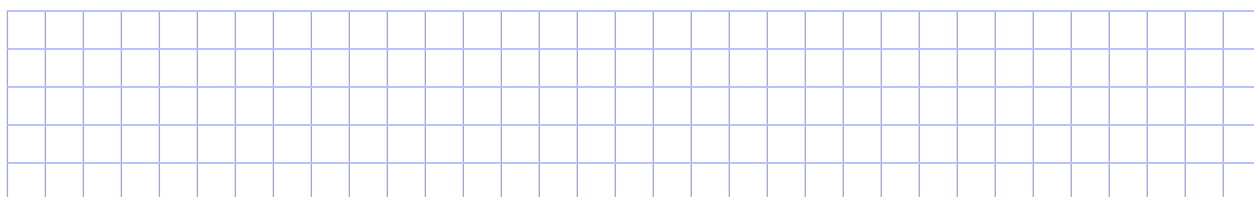
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

- 4.** Якщо функція $f(x)$ має похідну в точці x_0 , а функція $g(x)$ має похідну в точці $y_0 = f(x_0)$, то складена функція $h(x) = g(f(x))$ також має похідну в точці x_0 :

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Функцію, яка числу x_0 ставить у відповідність число $f''(x_0)$, називають **другою похідною** функції $f(x)$.

Приклад 5. Знайдіть похідну функції $y = \sqrt{6x^4 + 1}$.

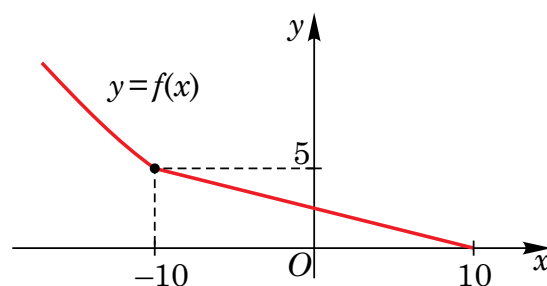


VII. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Мотогонщик рухається по параболічній кривій (див. рисунок), яка переходить у пряму лінію, що збігається з віссю абсцис. Функція, яка описує траєкторію руху гонщика,

$$\text{має вигляд } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x^2 + bx + c, & x < -10, \\ -\frac{1}{4}x + \frac{5}{2}, & x \geq -10, \end{cases} \quad \text{де } x$$



і $f(x)$ позначені у метрах. Щоб мотогонщик рухався вздовж траси, функція $f(x)$ має бути неперервною та диференційовною в точці $x_0 = -10$. Знайдіть такі значення b і c , які забезпечують неперервність і диференційовність функції $f(x)$.

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Знайдіть, за означенням, значення похідної функції $y = x^2 + 2x - 1$ у точці $x_0 = 10$.
2. Доведіть, за означенням, що для функції $y = ax^2 + bx + c$ похідною є функція $y' = 2ax + b$.
3. Знайдіть похідну функції $y = 0,1x^3 + 5$ у точці:
1) $x_0 = -1$; 2) $x_0 = -2$; 3) $x_0 = 1$; 4) $x_0 = 2$.
4. Доведіть, що похідна заданої функції приймає невід'ємні значення при всіх допустимих значеннях аргументу:
1) $y = 3x - 7$; 2) $y = x^3 + 1$; 3) $y = \sqrt{x}$; 4) $y = 1 - 6x^5$.
5. Знайдіть похідну функції у точці $x_0 = 5$:
1) $y = (x + 2)(x - 2)$; 2) $y = (x - 1)(x^2 + x + 1)$;
3) $y = \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}$; 4) $y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$.
6. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = -\frac{6}{x}$ у точці:
1) $x_0 = -1$; 2) $x_0 = -2$; 3) $x_0 = 3$; 4) $x_0 = 6$.
7. Визначте похідну функції (двома способами):
1) $y = x^2(x^3 - 5)$; 2) $y = (x - 2)(x + 3)$;
3) $y = x^3(3x^2 - 1)$; 4) $y = (x - 3)(x^2 - 2x + 4)$.
8. Напишіть рівняння дотичної до графіка функції в його точці з абсцисою x_0 :
1) $y = x^2 - 2x$, $x_0 = 3$; 2) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$;
3) $y = 3x^4 + 2x$, $x_0 = -2$; 4) $y = x^{-2}$, $x_0 = -1$.
9. Знайдіть похідну функції:
1) $y = \frac{2}{x} + 3x$; 2) $y = 5 - \frac{3}{x^2}$; 3) $y = \sqrt{x} + \frac{3}{x}$; 4) $y = \frac{2(x - 5)}{3x} + \sqrt{x}$.
10. Знайдіть похідну функції:
1) $y = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(2x - \frac{3}{x}\right)$; 2) $y = (1 - x + x^3)(5\sqrt{x} + x)$;
3) $y = (5 - \sqrt{x})(x^2 + 4\sqrt{x})$; 4) $y = \left(\frac{1}{x} - x^{20}\right)(1 - 2\sqrt{x})$.

Рівень В

1. Знайдіть похідну функції:
1) $y = \frac{x^2 + 3x - 7}{2x + 1}$; 2) $y = \frac{5x^4 - 1}{x^3 - x + 4}$; 3) $y = \frac{5 - 0,1x^{10}}{x^{10} - x + 5}$; 4) $y = \frac{\sqrt{x} + 2x}{1 - \sqrt{x}}$.
2. Знайдіть похідну функції:
1) $y = \frac{5\sqrt{x} - 1}{x^3 - x + 2}$; 2) $y = \frac{x^7 + 3x - 7}{2\sqrt{x} + x^3}$.
3. Розв'яжіть рівняння $f'(x) = 0$, якщо:
1) $f(x) = x - 12x^3$; 2) $f(x) = x^5 - 15x^3 + 4$.

- 4.** Розв'яжіть нерівність $f'(x) < 0$, якщо:
 1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$; 2) $f(x) = 12x - x^3$.
- 5.** Знайдіть функцію $f(x)$, якщо її похідна $f'(x) = 2x + 3$. Скільки розв'язків має задача?
- 6.** Напишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці x_0 :
 1) $f(x) = \frac{4}{x} + \frac{x}{4}$, $x_0 = 5$; 2) $f(x) = \frac{x^2 + 2}{3 + x}$, $x_0 = 7$;
 3) $f(x) = \frac{1}{x^2}(\sqrt{x} - 5)$, $x_0 = 25$; 4) $f(x) = \frac{1}{3}(0,5x^2 - \sqrt{x})^2$, $x_0 = 4$.
- 7.** Знайдіть абсцису точки, в якій дотична до графіка функції $f(x)$ паралельна осі Ox :
 1) $f(x) = 3x^4 - 6x^2 + 2$; 2) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$;
 3) $f(x) = x^2(2x - 9)$; 4) $f(x) = 2x(3 - 8x^3)$.
- 8.** Знайдіть координати точки, в якій дотична до графіка функції $y = f(x)$ паралельна прямій $y = 4x + 3$:
 1) $f(x) = 0,25x^4 + x^3 + 1$; 2) $f(x) = 4\sqrt{x} - x + 0,5x^2$.
- 9.** Знайдіть абсцису точки, в якій дотична до графіка функції $y = f(x)$ перпендикулярна прямій $y = 11x + 3$:
 1) $f(x) = \frac{x^2 + 2}{3 + x} - x$; 2) $f(x) = \frac{x}{11} - 2\sqrt{x} + \sqrt{3}$.
- 10.** Обчисліть площу трикутника, утвореного осями координат і дотичною до графіка функції $y = (2x - 1)(4x^2 - 4x + 1)$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Рівень С

- 1.** Напишіть рівняння дотичних до графіка функції $y = x^2 - 5x + 7$, які разом з осями координат утворюють рівнобедрений трикутник. Знайдіть площу цього трикутника.
- 2.** Напишіть рівняння дотичних, проведених до графіка функції $y = x^2 + 2x - 1$ з точки $A(-1; -3)$. Виконайте рисунок.
- 3.** З точки $A(2; 6)$ до графіка функції $y = -x^2 + 2x + 2$ проведені дотичні. Знайдіть відстань між точками дотику.
- 4.** Складіть рівняння спільних дотичних до графіків функції $y = -x^2 + 2x - 2$ і $y = x^2 + 2x$.
- 5.** Знайдіть точку перетину дотичних до графіка функції $y = x^2 - |5x - 1|$, проведені через точки з абсцисами:
 1) $x_0 = 1$; $x_0 = 2$; 2) $x_0 = 2$; $x_0 = -2$.
- 6.** При яких значеннях параметра a дотична до графіка функції $y = x^3 + ax^2$ у точці з абсцисою $x_0 = -1$ проходить через точку:
 1) $A(0; 5)$; 2) $A(3; 4)$?
- 7.** При яких значеннях x правильна рівність $(y')^2 + y^2 = 1$, якщо:
 1) $y = 1 - \sin x$; 2) $y = \sin x + \cos x$.
- 8.** Якою формулою можна задати функцію $y = f(x)$, якщо:
 1) $y' = 2x - \sin x$; 2) $y' = x^2 + 3 \cos x$.
- 9.** Знайдіть функцію $y = f(x)$, якщо:
 1) $f'(x) = \frac{1}{5 \sin^2 x}$ і $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,8$; 2) $f'(x) = 4 - \frac{1}{\cos^2 x}$ і $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi$.

- 10.** Знайдіть кут між дотичними, проведеними до графіків функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$, у точці $x_0 = 0$.

Рефлексія

Сьогодні я дізнався/дізналася

.....

.....

Найскладнішим для мене було

.....

.....

Тепер я вмію

.....

.....

Мені ще потрібно попрацювати

.....

.....

Поради собі на наступні уроки

.....

.....

Можливі теми проєктів

- 1.** Моделювання руху: швидкість і прискорення за допомогою похідної.
- 2.** Оптимізація: пошук максимумів і мінімумів у реальних задачах (економіка, фізика, побут).
- 3.** Похідна в природних процесах: зміна температури, росту рослин, біологічних систем.
- 4.** Аналіз даних: як похідна показує тренди та швидкість змін у графіках.
- 5.** Історія похідної: ключові ідеї Ньютона й Лейбніца та сучасні застосування.







