

Урок 17. Узагальнення та систематизація знань

Тип уроку: узагальнення та систематизації.

План уроку

1. Повторення.
2. Поняття похідної.
3. Фізичний зміст похідної.
4. Рівняння дотичної до графіка функції.
5. Знаходження похідних елементарних функцій. Правила обчислення похідних.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

визначає межі даних, формулює припущення щодо даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.3–1 П];

визначає, яких даних недостатньо чи є надлишкові дані, під час розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2–1 П];

обирає математичну модель розв'язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов [12 МАО 3.2.2–1 П];

добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого. Завдання можна розв'язувати усно.
- 3) Повторіть теорію теми 2, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні задачі. Обирайте ілюстративні задачі на власний розсуд.
- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.

6) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

7) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Можливі теми для створення проєктів запропоновані.

I. Організаційна частина (3–4 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чому потрібно вміти знаходити миттєву швидкість? У яких життєвих ситуаціях це важливо?

2) Чи можна передбачити, як швидко змінюється рівень цукру в крові або температура тіла пацієнта? Яка роль похідної у таких прогнозах?

3) Чи можна знайти оптимальну форму деталі або траєкторію руху автомобіля без похідної?

4) Для чого інженеру або програмісту потрібно знати, як поводить себе функція поблизу певної точки?

5) Чому похідні використовують для опису інфляції, курсу валют або зростання народонаселення?

II. Повторення (3 – 4 хв)

1. Знайдіть похідну функції $f(x) = 3x^5(1 - x^2)$.

Відповідь. $15x^4 - 21x^6$.

2. Обчисліть значення похідної функції $f(x)$ у точці $x_0 = 4$, якщо $f(x) = \frac{x+12}{3x}$.

Відповідь. $-0,25$.

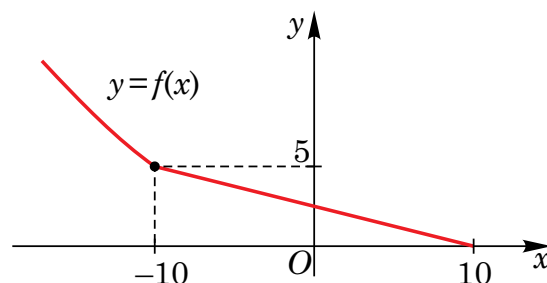
3. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^4 + x^2$ у точці $x_0 = -2$.

Відповідь. $-36x - 52$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Мотогонщик рухається по параболічній кривій (див. рисунок), яка переходить у пряму лінію, що збігається з віссю абсцис. Функція, яка описує траєкторію руху гонщика,

$$\text{має вигляд } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x^2 + bx + c, & x < -10, \\ -\frac{1}{4}x + \frac{5}{2}, & x \geq -10, \end{cases} \quad \text{де } x$$



і $f(x)$ позначені у метрах. Щоб мотогонщик рухався вздовж траси, функція $f(x)$ має бути неперервною та диференційовною в точці $x_0 = -10$. Знайдіть такі значення b і c , які забезпечують неперервність і диференційовність функції $f(x)$.

III. Поняття похідної

Порівнюючи значення функцій $f(x)$ у деякій фіксованій точці x_0 із значеннями цієї функції в різних точках x , що лежать в околі x_0 , зручно виражати різницю $f(x) - f(x_0)$ через різницю $x - x_0$, користуючись поняттям «приріст аргументу» і «приріст функції».

Різниця $x - x_0$ називаються **приростом незалежної змінної** (або приростом аргументу) в точці x_0 і позначається Δx (читається «дельта ікс»).

Отже, $\Delta x = x - x_0$, звідки $x = x_0 + \Delta x$.

Говорять також, що початкове значення аргументу x_0 отримало приріст Δx . Унаслідок цього, значення функції $f(x)$ зміниться на величину $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Ця різниця називається **приростом функції** $f(x)$ у точці x_0 , що відповідає приросту Δx , і позначається символом Δf (читається «дельта еф»), тобто, за означенням $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, звідки $f(x) = f(x_0) + \Delta f$.

Δf називаються також **приростом залежності змінної** і позначають через Δy для функції $y = f(x)$.

У прямокутній системі координат побудуємо графік довільної функції $y = f(x)$.

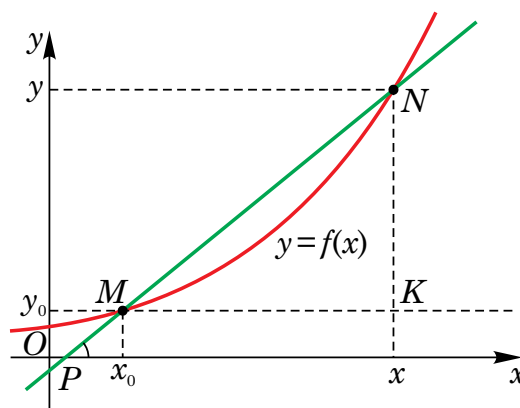
На графіку зафіксуємо дві точки $M(x_0; y_0)$ і $N(x; y)$ так, що точка M є нерухомою, а точка N може рухатись по графіку функції $y = f(x)$.

Отже, координати точки $N(x; y)$ змінюються при її русі по графіку функції до точки $M(x_0; y_0)$. Оскільки $\Delta x = x - x_0$, то абсциса точки N визначається як $x = x_0 + \Delta x$.

Зміна ординати точки N визначається як різниця $y - y_0$ або $f(x) - f(x_0)$, яка називається приростом функції у точці x_0 , що відповідає приросту аргументу Δx і позначається Δf . Отже, $\Delta f = f(x) - f(x_0)$.

Оскільки $x = x_0 + \Delta x$, то $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Відношення $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ називають *різницеvim відношенням приросту функції до приросту аргументу*.



Означення. Якщо існує границя відношення приросту функції Δf до приросту аргументу Δx за умови, що Δx прямує до нуля, тобто $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, то цю границю називають **похідною функції** $f(x)$ у точці $x = x_0$ і позначають $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0)$.

Ілюстративний приклад

4. За означенням, знайдіть похідну функції $y = \sqrt[3]{x}$.

Розв'язання. Маємо:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x + \Delta x} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x + \Delta x} - \sqrt[3]{x}) \left(\sqrt[3]{(x + \Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x + \Delta x)} + \sqrt[3]{x^2} \right)}{\Delta x \left(\sqrt[3]{(x + \Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x + \Delta x)} + \sqrt[3]{x^2} \right)} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x \left(\sqrt[3]{(x + \Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x + \Delta x)} + \sqrt[3]{x^2} \right)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x \left(\sqrt[3]{(x + \Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x + \Delta x)} + \sqrt[3]{x^2} \right)} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x + \Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x + \Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}. \end{aligned}$$

Відповідь. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

IV. Фізичний зміст похідної

Якщо точка рухається по прямій і відома її координата руху $x(t)$, то середня швидкість руху тіла за проміжок часу $[t_0; t_0 + \Delta t]$ визначається так:

$$v_c(\Delta t) = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}.$$

Швидкість тіла в момент часу t називається миттєвою швидкістю руху тіла.

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}.$$

Отже, миттєва швидкість руху тіла — відношення приросту функції, яка задає траєкторію руху до приросту часу. Тому похідна від функції, яка задає рівняння руху тіла в деякий момент часу t_0 — $y = x^2 - |5x - 1|$ це миттєва швидкість руху тіла: $v(t_0) = s'(t_0)$.

Швидкість зміни швидкості називають **прискорення** руху тіла ($a(t)$).

У загальному випадку матеріальна точка рухається нерівномірно, а отже, її швидкість змінюється за модулем і за напрямом. Такий рух називають змінним і характеризують прискоренням.

Середнім прискоренням за проміжок часу Δt називають відношення зміни швидкості до проміжку часу $a(t) = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

Тоді миттєве прискорення (або прискорення) визначається границею, до якої прямує середнє прискорення якщо $\Delta t \rightarrow 0$: $a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t}$.

Таким чином, прискорення руху тіла є похідною за часом від швидкості матеріальної точки $a(t) = v'(t)$.

Ілюстративні приклади

- 5.** Знайдіть момент часу, коли прискорення рухомої точки дорівнюватиме 4 м/с^2 , якщо точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = 3t^2 - \frac{9}{t} + 7$, де $x(t)$ — шлях (у м), t — час (у секундах).

Розв'язання. Знайдемо похідну $x(t)$: $x'(t) = 6t - \frac{9}{t^2}$. Отже, $v(t) = 6t + \frac{9}{t^2}$.

Знайдемо прискорення $a(t) = v'(t) = 6 - \frac{18}{t^3}$.

За умовою, $a(t) = 4 \text{ м/с}^2$, тоді $6 - \frac{18}{t^3} = 4$, $-\frac{18}{t^3} = -2$, $t^3 = 9$, $t = \sqrt[3]{9} \approx 2,08 \text{ (с)}$.

Відповідь. 2 с.

- 6.** Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $S(t) = t^2 + t + 8$, де S — відстань (у м), t — час (у с). Знайдіть швидкість тіла через 5 с від початку руху.

Розв'язання. Знайдемо похідну $S'(t) = 2t + 1$.

Знайдемо значення похідної при $t = 5 \text{ (с)}$: $S'(5) = 2 \cdot 5 + 1 = 11 \text{ (м/с}^2\text{)}$.

Відповідь. 11 м/с².

V. Рівняння дотичної до графіка функції

Дотична до графіка функції в точці x_0 є граничним положенням січної, якщо $\Delta x \rightarrow 0$.

Існування похідної функції в точці x_0 — це існування дотичної до графіка функції у точці $(x_0; f(x_0))$, при цьому кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює похідній функції в точці x_0 , тобто числу $f'(x_0)$. У цьому полягає геометричний зміст похідної.

$$k = f'(x_0) = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Дотична до графіка диференційованої в точці x_0 функції $f(x)$ — це пряма, яка проходить через точку $(x_0; f(x_0))$ і має кутовий коефіцієнт $f'(x_0)$.

Рівняння дотичної: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Щоб скласти рівняння дотичної, потрібно знати три числа:

- 1) x_0 — абсциса точки дотику.
- 2) $f(x_0)$ — значення функції в точці з абсцисою x_0 .
- 3) $f'(x_0)$ — значення похідної в точці x_0 , або кутовий коефіцієнт дотичної.

Ілюстративні приклади

- 7.** Обчисліть тангенс кута нахилу дотичної до графіка функції $f(x) = x - \frac{1}{3x^2}$ у точці з абсцисою $x_0 = \frac{1}{3}$.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції:

$$f'(x) = \left(x - \frac{1}{3}x^{-2}\right)' = 1 + \frac{2}{3}x^{-3} = 1 + \frac{2}{3x^3}. \text{ Тоді } \operatorname{tg} \alpha = f'\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + 18 = 19.$$

Відповідь. 19.

8. Обчисліть ординату точки графіка функції $y = 2x^2 - 3x + 1$, у якій дотична до графіка паралельна прямій $y = 3x + 7$.

Розв'язання. Оскільки дотична до графіка функції паралельна прямій $y = 3x + 7$, то кутові коефіцієнти дотичної $y = kx + b$ і прямої $y = 3x + 7$ рівні, тобто $k = 3$.

Отже, $f'(x_0) = k = 3$.

Знайдемо $f'(x) = (2x^2 - 3x + 1)' = 4x - 3$.

Розв'яжемо рівняння $f'(x_0) = 3$: $4x_0 - 3 = 3$, $x_0 = 1,5$.

Знайдемо y_0 — ординату точки дотику графіка функції y :

$$y(x_0) = 2 \cdot (1,5)^2 - 3 \cdot 1,5 + 1 = 4,5 - 4,5 + 1 = 1.$$

Відповідь. 1.

VI. Правила обчислення похідних

Похідні елементарних функцій

Функція	Похідна функція
$y = kx + b$	k
$y = x^n$	$n \cdot x^{n-1}$
$y = \sin x$	$\cos x$
$y = \cos x$	$-\sin x$
$y = \operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$y = \operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$y = \arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$y = \operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Правила обчислення похідних

1. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовні в точці x_0 , то їхня сума диференційовна в цій точці:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Тобто похідна суми функцій дорівнює сумі похідних.

- 2.** Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовні в точці x_0 , то їхній добуток диференційований у цій точці:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

- 3.** Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовні в точці x_0 і функція $g(x)$ не дорівнює нулю в цій точці, то їхня частка $\frac{f(x)}{g(x)}$ також диференційована в цій точці:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

- 4.** Якщо функція $f(x)$ має похідну в точці x_0 , а функція $g(x)$ має похідну в точці $y_0 = f(x_0)$, то складена функція $h(x) = g(f(x))$ також має похідну в точці x_0 :

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Функцію, яка числу x_0 ставить у відповідність число $f''(x_0)$, називають **другою похідною** функції $f(x)$.

Ілюстративні приклади

- 9.** Знайдіть похідну функції $y = \sqrt{6x^4 + 1}$.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції, за правилом знаходження похідної складеної функції.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{6x^4 + 1}} \cdot (6x^4 + 1)' = \frac{1}{2\sqrt{6x^4 + 1}} \cdot 24x^3 = \frac{12x^3}{\sqrt{6x^4 + 1}}.$$

Відповідь. $\frac{12x^3}{\sqrt{6x^4 + 1}}.$

- 10.** Знайдіть $f'\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, якщо $f(x) = 4 \cos \frac{5x}{2} - 7x + 3$.

Розв'язання.

$$f'(x) = \left(4 \cos \frac{5x}{2} - 7x + 3 \right)' = -4 \sin \frac{5x}{2} \cdot \left(\frac{5x}{2} \right)' - 7 = -4 \sin \frac{5x}{2} \cdot \frac{5}{2} - 7 = -10 \sin \frac{5x}{2} - 7.$$

$$f'\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -10 \sin \left(\frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) - 7 = 10 \sin \frac{5\pi}{6} - 7 = 10 \cdot \frac{1}{2} - 7 = -2.$$

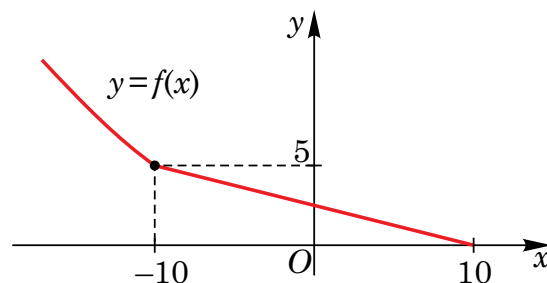
Відповідь. $-2.$

VII. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (8–10 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Мотогонщик рухається по параболічній кривій (див. рисунок), яка переходить у прямую лінію, що збігається з віссю абсцис. Функція, яка описує траєкторію руху гонщика,

$$\text{має вигляд } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x^2 + bx + c, & x < -10, \\ -\frac{1}{4}x + \frac{5}{2}, & x \geq -10, \end{cases} \quad \text{де } x$$



і $f(x)$ позначені у метрах. Щоб мотогонщик рухався вздовж траси, функція $f(x)$ має бути неперервною та диференційовною в точці $x_0 = -10$. Знайдіть такі значення b і c , які забезпечують неперервність і диференційовність функції $f(x)$.

Розв'язання. Для того, щоб функція $f(x)$ була неперервною необхідно, щоб виконувалась рівність $\lim_{x \rightarrow -10_-} f(x) = f(-10)$.

Оскільки $\lim_{x \rightarrow -10_-} f(x) = \frac{1}{10}(-10)^2 - 10b + c = 10 - 10b + c$ і $f(-10) = 5$, то $10 - 10b + c = 5$.

Звідси маємо $c = 10b - 5$.

Для того, щоб функція $f(x)$ була диференційовною при $x_0 = -10$ має існувати границя: $f'(-10) = \lim_{x \rightarrow -10} \frac{f(x) - f(-10)}{x + 10}$.

Оскільки $f(x)$ задана різними виразами справа і зліва, потрібно обчислити границю справа і зліва, а потім порівняти отримані значення.

$$\lim_{x \rightarrow -10_-} \frac{f(x) - f(-10)}{x + 10} = \lim_{x \rightarrow -10_-} \frac{\frac{1}{10}x^2 + bx + c - 5}{x + 10}.$$

Підставимо $\lim_{x \rightarrow -10_-} f(x) = \frac{1}{10}(-10)^2 - 10b + c = 10 - 10b + c$ і $f(-10) = 5$, то $10 - 10b + c = 5$.

Звідси маємо $c = 10b - 5$.

$$\lim_{x \rightarrow -10_-} \frac{\frac{1}{10}x^2 + bx + (10b - 5) - 5}{x + 10} = \lim_{x \rightarrow -10_-} \frac{x^2 - 100 + 10bx + 100b}{10(x + 10)} = b - 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow -10_+} \frac{f(x) - f(-10)}{x + 10} = \lim_{x \rightarrow -10_+} \frac{-\frac{1}{4}x + \frac{5}{2} - 5}{x + 10} = \lim_{x \rightarrow -10_+} \frac{-(x + 10)}{4(x + 10)} = -\frac{1}{4}.$$

Тоді отримаємо $b - 2 = -\frac{1}{4}$. Звідси маємо $b = \frac{7}{4}$ і $c = 10 \cdot \frac{7}{4} - 5 = \frac{25}{2}$.

Відповідь. $\frac{7}{4}; \frac{25}{2}$.

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Знайдіть, за означенням, значення похідної функції $y = x^2 + 2x - 1$ у точці $x_0 = 10$.
2. Доведіть, за означенням, що для функції $y = ax^2 + bx + c$ похідною є функція $y' = 2ax + b$.
3. Знайдіть похідну функції $y = 0,1x^3 + 5$ у точці:
1) $x_0 = -1$; 2) $x_0 = -2$; 3) $x_0 = 1$; 4) $x_0 = 2$.
4. Доведіть, що похідна заданої функції приймає невід'ємні значення при всіх допустимих значеннях аргументу:
1) $y = 3x - 7$; 2) $y = x^3 + 1$; 3) $y = \sqrt{x}$; 4) $y = 1 - 6x^5$.
5. Знайдіть похідну функції у точці $x_0 = 5$:
1) $y = (x + 2)(x - 2)$; 2) $y = (x - 1)(x^2 + x + 1)$;
3) $y = \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}$; 4) $y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$.
6. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = -\frac{6}{x}$ у точці:
1) $x_0 = -1$; 2) $x_0 = -2$; 3) $x_0 = 3$; 4) $x_0 = 6$.
7. Визначте похідну функції (двома способами):
1) $y = x^2(x^3 - 5)$; 2) $y = (x - 2)(x + 3)$;
3) $y = x^3(3x^2 - 1)$; 4) $y = (x - 3)(x^2 - 2x + 4)$.
8. Напишіть рівняння дотичної до графіка функції в його точці з абсцисою x_0 :
1) $y = x^2 - 2x$, $x_0 = 3$; 2) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$;
3) $y = 3x^4 + 2x$, $x_0 = -2$; 4) $y = x^{-2}$, $x_0 = -1$.
9. Знайдіть похідну функції:
1) $y = \frac{2}{x} + 3x$; 2) $y = 5 - \frac{3}{x^2}$; 3) $y = \sqrt{x} + \frac{3}{x}$; 4) $y = \frac{2(x - 5)}{3x} + \sqrt{x}$.
10. Знайдіть похідну функції:
1) $y = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(2x - \frac{3}{x}\right)$; 2) $y = (1 - x + x^3)(5\sqrt{x} + x)$;
3) $y = (5 - \sqrt{x})(x^2 + 4\sqrt{x})$; 4) $y = \left(\frac{1}{x} - x^{20}\right)(1 - 2\sqrt{x})$.

Рівень В

1. Знайдіть похідну функції:
1) $y = \frac{x^2 + 3x - 7}{2x + 1}$; 2) $y = \frac{5x^4 - 1}{x^3 - x + 4}$; 3) $y = \frac{5 - 0,1x^{10}}{x^{10} - x + 5}$; 4) $y = \frac{\sqrt{x} + 2x}{1 - \sqrt{x}}$.
2. Знайдіть похідну функції:
1) $y = \frac{5\sqrt{x} - 1}{x^3 - x + 2}$; 2) $y = \frac{x^7 + 3x - 7}{2\sqrt{x} + x^3}$.
3. Розв'яжіть рівняння $f'(x) = 0$, якщо:
1) $f(x) = x - 12x^3$; 2) $f(x) = x^5 - 15x^3 + 4$.

- 4.** Розв'яжіть нерівність $f'(x) < 0$, якщо:
- 1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$; 2) $f(x) = 12x - x^3$.
- 5.** Знайдіть функцію $f(x)$, якщо її похідна $f'(x) = 2x + 3$. Скільки розв'язків має задача?
- 6.** Напишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці x_0 :
- 1) $f(x) = \frac{4}{x} + \frac{x}{4}$, $x_0 = 5$; 2) $f(x) = \frac{x^2 + 2}{3 + x}$, $x_0 = 7$;
- 3) $f(x) = \frac{1}{x^2}(\sqrt{x} - 5)$, $x_0 = 25$; 4) $f(x) = \frac{1}{3}(0,5x^2 - \sqrt{x})^2$, $x_0 = 4$.
- 7.** Знайдіть абсцису точки, в якій дотична до графіка функції $f(x)$ паралельна осі Ox :
- 1) $f(x) = 3x^4 - 6x^2 + 2$; 2) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$;
- 3) $f(x) = x^2(2x - 9)$; 4) $f(x) = 2x(3 - 8x^3)$.
- 8.** Знайдіть координати точки, в якій дотична до графіка функції $y = f(x)$ паралельна прямій $y = 4x + 3$:
- 1) $f(x) = 0,25x^4 + x^3 + 1$; 2) $f(x) = 4\sqrt{x} - x + 0,5x^2$.
- 9.** Знайдіть абсцису точки, в якій дотична до графіка функції $y = f(x)$ перпендикулярна прямій $y = 11x + 3$:
- 1) $f(x) = \frac{x^2 + 2}{3 + x} - x$; 2) $f(x) = \frac{x}{11} - 2\sqrt{x} + \sqrt{3}$.
- 10.** Обчисліть площу трикутника, утвореного осями координат і дотичною до графіка функції $y = (2x - 1)(4x^2 - 4x + 1)$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Рівень С

- 1.** Напишіть рівняння дотичних до графіка функції $y = x^2 - 5x + 7$, які разом з осями координат утворюють рівнобедрений трикутник. Знайдіть площу цього трикутника.
- 2.** Напишіть рівняння дотичних, проведених до графіка функції $y = x^2 + 2x - 1$ з точки $A(-1; -3)$. Виконайте рисунок.
- 3.** З точки $A(2; 6)$ до графіка функції $y = -x^2 + 2x + 2$ проведені дотичні. Знайдіть відстань між точками дотику.
- 4.** Складіть рівняння спільних дотичних до графіків функції $y = -x^2 + 2x - 2$ і $y = x^2 + 2x$.
- 5.** Знайдіть точку перетину дотичних до графіка функції $y = x^2 - |5x - 1|$, проведені через точки з абсцисами:
- 1) $x_0 = 1$; $x_0 = 2$; 2) $x_0 = 2$; $x_0 = -2$.
- 6.** При яких значеннях параметра a дотична до графіка функції $y = x^3 + ax^2$ у точці з абсцисою $x_0 = -1$ проходить через точку:
- 1) $A(0; 5)$; 2) $A(3; 4)$?
- 7.** При яких значеннях x правильна рівність $(y')^2 + y^2 = 1$, якщо:
- 1) $y = 1 - \sin x$; 2) $y = \sin x + \cos x$.
- 8.** Якою формулою можна задати функцію $y = f(x)$, якщо:
- 1) $y' = 2x - \sin x$; 2) $y' = x^2 + 3 \cos x$.
- 9.** Знайдіть функцію $y = f(x)$, якщо:
- 1) $f'(x) = \frac{1}{5 \sin^2 x}$ і $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,8$; 2) $f'(x) = 4 - \frac{1}{\cos^2 x}$ і $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi$.

- 10.** Знайдіть кут між дотичними, проведеними до графіків функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$, у точці $x_0 = 0$.

ІХ. Рефлексія (1–2 хв)

Сьогодні я дізнався/дізналася

.....

.....

Найскладнішим для мене було

.....

.....

Тепер я вмію

.....

.....

Мені ще потрібно попрацювати

.....

.....

Поради собі на наступні уроки

.....

.....

Можливі теми проєктів

- 1.** Моделювання руху: швидкість і прискорення за допомогою похідної.
- 2.** Оптимізація: пошук максимумів і мінімумів у реальних задачах (економіка, фізика, побут).
- 3.** Похідна в природних процесах: зміна температури, росту рослин, біологічних систем.
- 4.** Аналіз даних: як похідна показує тренди та швидкість змін у графіках.
- 5.** Історія похідної: ключові ідеї Ньютона й Лейбніца та сучасні застосування.

Список використаної літератури

1) Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень: підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2018.