

Урок 2. **Задача про дотичну, проведену до графіка функції**

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

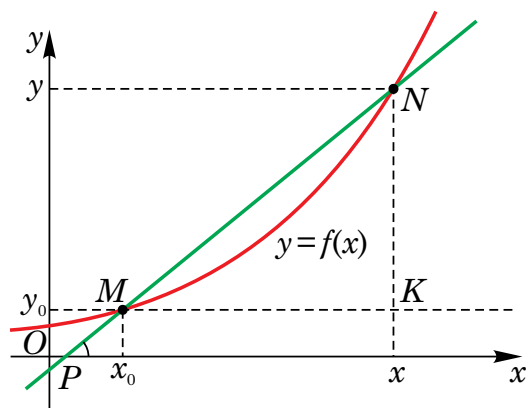
- 1) повторите, що таке січна графіка функції та для чого вона використовується;
- 2) зрозумієте, що таке дотична як граничне положення січної;
- 3) дізнаєтесь, що таке кутовий коефіцієнт січної та дотичної і як він обчислюється;
- 4) вивчите геометричний зміст кутових коефіцієнтів як кутів нахилу прямої;
- 5) навчитесь практично обчислювати кутовий коефіцієнт дотичної.

II. Повторення

1. Знайдіть приріст функції $y = 5x + 1$ якщо $x_0 = -1$, $\Delta x = 0,3$.
2. Для функції $y = x^2 - x$ виразіть приріст Δy якщо $x_0 = 3$, $x = 2,25$.
3. Кількість завантажених мегабайт даних за час t описується функцією $S(t) = t^2 + t$. Знайдіть середню швидкість завантаження даних між $t = 2$ с і $t = 5$ с.

III. Поняття січної графіка функції

Означення. Пряма, яка проходить через будь-які дві точки (наприклад, точки M і N) графіка функції, називається **січною графіка функції** $y = f(x)$ (див. рисунок).



Отже, пряма MN — січна. Кутовий коефіцієнт прямої $y = kx + b$ дорівнює тангенсу кута, який ця пряма утворює з додатним напрямком осі Ox . Тобто $k = \operatorname{tg} \alpha$, де $\alpha = \angle MPx$.

Позначимо точку перетину перпендикулярів, проведених із точок M і N , через K . Оскільки $MK \parallel Ox$, то $\angle MPx = \angle NMK$, як кути при перетині паралельних прямих січною NP .

Із прямокутного трикутника NKM : $\operatorname{tg} \angle NMK = \frac{NK}{MK}$.

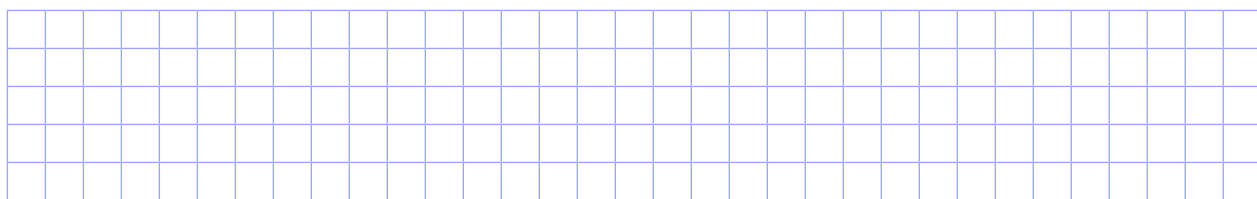
Оскільки $NK = \Delta f = \Delta y$, $MK = \Delta x$, то $\operatorname{tg} \angle NMK = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Оскільки $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, то $\operatorname{tg} \angle NMK = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \angle MPx$.

Отже, $k = \operatorname{tg} \angle MPx = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Таким чином, кутовий коефіцієнт січної графіка функції $y = f(x)$ дорівнює відношенню приросту функції до приросту аргументу. У цьому полягає **геометричний зміст кутового коефіцієнта** січної.

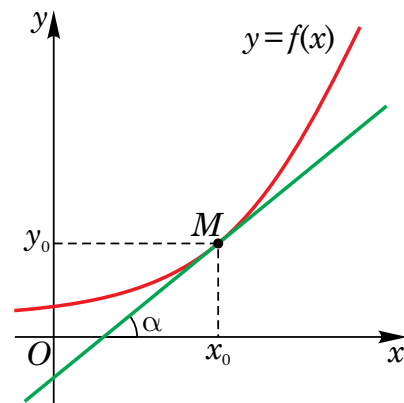
Приклад 1. Знайдіть кут перетину січної графіка функції $f(x) = x^2$ з віссю абсцис, якщо січна проходить через точки $(1; 1)$ і $(2; 4)$.



IV. Означення дотичної, проведеної до графіка функції, як граничне положення січної

Точка N рухається по графіку функції і наближається до точки M . При цьому вона може як завгодно близько наблизитися до точки M . Звичайно, що тоді зменшується приріст аргументу, тобто $\Delta x \rightarrow 0$ (прямує до нуля), та приріст функції, тобто $\Delta f \rightarrow 0$ (прямує до 0).

У такому випадку січну MN називають **дотичною** до графіка функції $y = f(x)$ в точці (x_0, y_0) . Кутовим коефіцієнтом дотичної є число $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha$, де α — кут перетину



дотичної з додатним напрямом осі Ox . Наприклад, якщо $\Delta x = 0,0000006$, $\Delta f = 0,0000012$, то $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0,0000012}{0,0000006} = 2$. Тоді кут перетину дотичної з додатним напрямом осі Ox становить $\alpha = \arctg 2$.

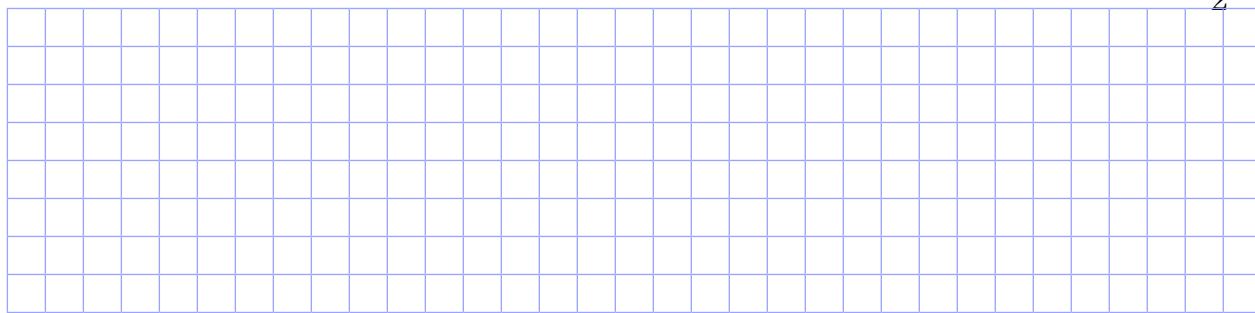
Також, це означає, що кутовий коефіцієнт дотичної проведений в точці x_0 може бути визначений $k(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$.

За допомогою введених позначень приростів відношення

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

називають **середньою швидкістю зміни функції** на проміжку з кінцями x_0 і $x_0 + \Delta x$.

Приклад 2. Знайдіть формулу для обчислення кутового коефіцієнта дотичної до графіка функції $f(x) = -x^2$ у точці з абсцисою x_0 . Який кут з додатним напрямком осі абсцис утворює дотична, проведена до цього графіка в точці з абсцисою $x_0 = -\frac{1}{2}$?



V. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Рух повітряної кулі описується функцією $h = f(t)$, де h — висота над землею (в метрах, t — час (у хвилинах)). Відомо, що за перші 6 хвилин куля піднялася з нульової висоти до 170 метрів. У часовому проміжку від 6-ої хвилини до 8-ої хвилини висота підняття кулі збільшувалася на 40 метрів за кожну хвилину.

1. Знайдіть різницеве відношення приросту функції до приросту аргументу впродовж перших 6 хвилин підняття кулі.
2. Знайдіть кутовий коефіцієнт січної до графіка $h = f(t)$, що проходить через точки $C(6; h(6))$ і $D(8; h(8))$.
3. Порівняйте отримані коефіцієнти та зробіть висновки.

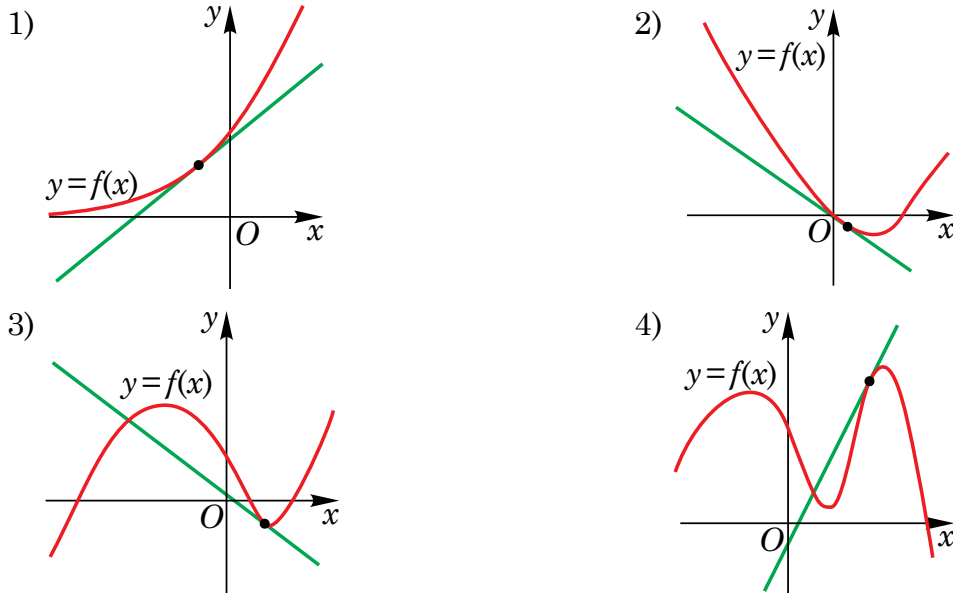
VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Дано функцію $r(x) = x^3 - 6x^2 + 3x$.
 - 1) Знайдіть відношення приросту функції до приросту аргументу.
 - 2) Обчисліть кутові коефіцієнти дотичних у точках $x_0 = 0$ і $x_0 = 3$.
 - 3) Розташуйте значення коефіцієнтів дотичної за зростанням (нанесіть на координатну вісь).

- 2.** Вартість акцій компанії описується функцією $g(x) = 2x^2 - 3x + 20$, де x — місяці від початку року, $g(x)$ — ціна акції у гривнях.
- 1) Знайдіть кутовий коефіцієнт січної між 2-м і 5-м місяцем.
 - 2) Обчисліть кутовий коефіцієнт дотичної у 4-му місяці.
 - 3) Що це означає для інвестора?

- 3.** Використовуючи дотичні проведені до графіків функції, розташуйте рисунки в порядку зростання кутових коефіцієнтів:



- 4.** Дано функцію $g(x) = -0,5x^2 + 4$.
- 1) Використовуючи різницеве відношення, знайдіть значення кутового коефіцієнта січної, яка проходить через точки з абсцисам $x_1 = 2$ і $x_2 = -2$.
 - 2) Побудуйте схематичний графік функції $g(x)$ та січної через задані точки.
- 5.** Дано функцію $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2x - 7$.
- 1) Обчисліть середню швидкість зміни функції $f(x)$ на відрізку $[1; 4]$.
 - 2) Знайдіть миттєву швидкість зміни функції в точці $x = 2$.
 - 3) Порівняйте середню та миттєву швидкості зміни функції і зробіть висновок.

Рівень В

- 1.** Знайдіть кутовий коефіцієнт:
- 1) січної графіка функції $y = x^2$, яка проходить через точки графіка з абсцисами $x_0 = 1$, $x_1 = 1,6$;
 - 2) січної графіка функції $y = x^3$, яка проходить через точки графіка з абсцисами $x_0 = 2$ і $x_1 = 1$;
 - 3) дотичної до графіка функції $y = x^3$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$.
- 2.** Побудуйте прямі, які проходять через точку $(1; 3)$ і мають кутові коефіцієнти:
- 1) -1 і 2 ;
 - 2) $\frac{1}{2}$ і -3 ;
 - 3) 3 і -2 ;
 - 4) $-\frac{1}{2}$ і -2 .
- З'ясуйте в кожному з випадків, який кут (тупий або гострий) утворюють ці прямі з віссю абсцис.

- 3.** Знайдіть кутовий коефіцієнт січної до графіка функції $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, що проходить через точки з даними абсцисами x_1 і x_2 . Який кут (гострий чи тупий) утворює січна з віссю Ox , якщо:
- 1) $x_1 = 0, x_2 = 1$; 2) $x_1 = -1, x_2 = -2$; 3) $x_1 = 1, x_2 = 2$; 4) $x_1 = -1, x_2 = 0$?
- 4.** Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції $f(x)$ у точці з абсцисою x_0 .
- 1) $f(x) = x^4, x_0 = -2$; 2) $f(x) = \sqrt[3]{x}, x_0 = 27$;
 3) $f(x) = \frac{1}{x^3}, x_0 = -3$; 4) $f(x) = \cos x, x_0 = -\frac{\pi}{2}$.
- 5.** Дано функцію $g(x) = x^3 + 2x$.
- 1) Використовуючи різницеве відношення між $x_1 = 1$ і $x_2 = 2$, знайдіть кутовий коефіцієнт січної.
 2) Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної в точці $x_0 = 1$.
 3) Побудуйте схематично графік функції та обидві прямі (січну і дотичну), які проходять через задані точки.
- 6.** Дано функцію $h(x) = \sqrt{x+3}$.
- 1) Знайдіть середній приріст на відрізку $[1; 4]$.
 2) Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної в точці $x_0 = 1$.
 3) Який кут утворює дотична з віссю Ox ?
- 7.** Дано функцію $f(x) = \frac{1}{x} + 4x$.
- 1) Обчисліть середню швидкість зміни функції на відрізку $[1; 2]$.
 2) Знайдіть миттєву швидкість зміни функції в точці $x = 1,5$.
- 8.** Дано функцію $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$.
- 1) Обчисліть середню швидкість зміни функції на відрізку $[-1; 2]$.
 2) Знайдіть миттєву швидкість зміни функції в точці $x = 0$.
 3) Поясніть, чи збігається середня та миттєва швидкості зміни в цій точці.

Рівень С

- 1.** Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до параболи $y = x^2$ точці з абсцисою $x_0 = 1$.
- 2.** Знайдіть кут нахилу параболи $y = x^2 - x + 1$ до осі Ox в точці $x_0 = -1$.
- 3.** Знайдіть кут, під яким парабола $y = x^2 + x$ перетинає вісь Ox .
- 4.** Знайдіть гострі кути, утворені при перетині параболи $x^2 - 4y = 0$ та прямої $x - 2y + 4 = 0$.
- 5.** Знайдіть гострі кути, що утворені при перетині парабол $y^2 = 4x$ та $x^2 = \frac{1}{2}y$.
- 6.** Дано функцію $f(x) = 0,5x^3 - 2x^2 + 3$. Знайдіть значення x , для якого кутовий коефіцієнт дотичної до графіка цієї функції дорівнює -1 .
- 7.** Дано функцію $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$. Знайдіть, у який момент часу x миттєва швидкість зміни функції $f(x)$ дорівнює 3.

Рефлексія

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
.....
.....
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
.....
.....
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
.....
.....
- 4) Найскладнішим для мене було
.....
.....
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
.....
.....
- 6) Найбільше мені сподобалося
.....
.....







