

Урок 2. **Задача про дотичну, проведену до графіка функції**

Тип уроку: формування умінь і навичок.

План уроку

1. Означення дотичної, проведеної до графіка функції, як граничне положення січної.
2. Поняття кутових коефіцієнтів січної та дотичної, проведених до графіка функції.
3. Геометричний зміст кутових коефіцієнтів січної та дотичної, проведених до графіка функції.
4. Практичне обчислення кутового коефіцієнта дотичної, проведеної до графіка функції.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

пов'язує різні математичні знання і вміння, узагальнює їх, робить висновки [12 МАО 4.1.1–1 П];

реалізовує визначену послідовність дій для розв'язання специфічних проблемних ситуацій, перевіряє та досліджує отримані результати [12 МАО 4.2.1–2 П];

аналізує результати дій із математичними об'єктами у процесі розв'язання проблемної ситуації [12 МАО 4.2.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Перед початком вивчення теми запропонуйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Заохочуйте учнів/учениць наводити власні приклади із життя.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям розв'язати приклади на повторення на власний вибір.
- 3) Сформулюйте (без розв'язання) практичну задачу. Запропонуйте учням/ученицям розв'язати її наприкінці уроку у формі групової роботи.
- 4) Теорію подавайте стисло. Зразки можливого подання теорії наводяться.
- 5) До кожного теоретичного твердження наведено ілюстративні приклади. Обирайте їх на свій розсуд.

6) Увесь запропонований практичний матеріал (у тому числі ілюстративні приклади) неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість і зміст матеріалу на власний розсуд.

7) З огляду на доцільність, вчитель/вчителька може змінити порядок проведення уроків та розглянути даний урок після вивчення поняття похідної.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Під час роботи над покращенням алгоритму штучного інтелекту, який навчається і поступово зменшує втрати, замовник хоче знати, як швидко змінюється рівень втрат у конкретний момент часу. Необхідно пояснити, як це оцінити і чому цей показник важливий для аналізу ефективності навчання.

2) Під час розробки аналітичного сервісу для трейдерів криптовалют постає завдання оцінити, наскільки швидко змінюється курс криптовалюти у певну секунду, щоб допомогти ухвалити рішення про купівлю чи продаж. Потрібно пояснити, як це можна визначити і що покаже знайдене значення для вибору стратегії.

3) Під час розробки системи онлайн-аналітики для відстеження поведінки користувачів сайту потрібно дізнатися, з якою швидкістю змінюється кількість активних сеансів у певну секунду для коректного розподілу навантаження між серверами. Потрібно пояснити, як визначити цей показник і як використати його у системі моніторингу.

II. Повторення (3–4 хв)

1. Знайдіть приріст функції $y = 5x + 1$ якщо $x_0 = -1$, $\Delta x = 0,3$.
Відповідь. 1,5.
2. Для функції $y = x^2 - x$ виразіть приріст Δy якщо $x_0 = 3$, $x = 2,25$.
Відповідь. $-3,1875$.
3. Кількість завантажених мегабайт даних за час t описується функцією $S(t) = t^2 + t$. Знайдіть середню швидкість завантаження даних між $t = 2$ с і $t = 5$ с.
Відповідь. 8 МБ/од. часу.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Рух повітряної кулі описується функцією $h = f(t)$, де h — висота над землею (в метрах, t — час (у хвилини)). Відомо, що за перші 6 хвилин куля піднялася з нульової висоти до 170 метрів. У часовому проміжку від 6-ої хвилини до 8-ої хвилини висота підняття кулі збільшувалася на 40 метрів за кожну хвилину.

1. Знайдіть різницеве відношення приросту функції до приросту аргументу впродовж перших 6 хвилин підняття кулі.

2. Знайдіть кутовий коефіцієнт січної до графіка $h = f(t)$, що проходить через точки $C(6; h(6))$ і $D(8; h(8))$.
3. Порівняйте отримані коефіцієнти та зробіть висновки.

III. Поняття січної графіка функції

Означення. Пряма, яка проходить через будь-які дві точки (наприклад, точки M і N) графіка функції, називається **січною графіка функції** $y = f(x)$ (див. рисунок).

Отже, пряма MN — січна. Кутовий коефіцієнт прямої $y = kx + b$ дорівнює тангенсу кута, який ця пряма утворює з додатним напрямком осі Ox . Тобто $k = \operatorname{tg} \alpha$, де $\alpha = \angle MPx$.

Позначимо точку перетину перпендикулярів, проведених із точок M і N , через K . Оскільки $MK \parallel Ox$, то $\angle MPx = \angle NMK$, як кути при перетині паралельних прямих січною NP .

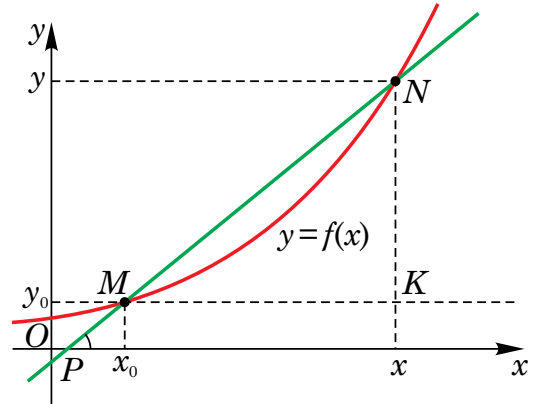
Із прямокутного трикутника NKM : $\operatorname{tg} \angle NMK = \frac{NK}{MK}$.

Оскільки $NK = \Delta f = \Delta y$, $MK = \Delta x$, то $\operatorname{tg} \angle NMK = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Оскільки $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, то $\operatorname{tg} \angle NMK = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \angle MPx$.

Отже, $k = \operatorname{tg} \angle MPx = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Таким чином, кутовий коефіцієнт січної графіка функції $y = f(x)$ дорівнює відношенню приросту функції до приросту аргументу. У цьому полягає **геометричний зміст кутового коефіцієнта** січної.



Ілюстративний приклад

4. Знайдіть кут перетину січної графіка функції $f(x) = x^2$ з віссю абсцис, якщо січна проходить через точки $(1; 1)$ і $(2; 4)$.

Розв'язання. Знайдемо приріст аргументу: $\Delta x = 2 - 1 = 1$.

Знайдемо приріст функції: $\Delta y = 4 - 1 = 3$.

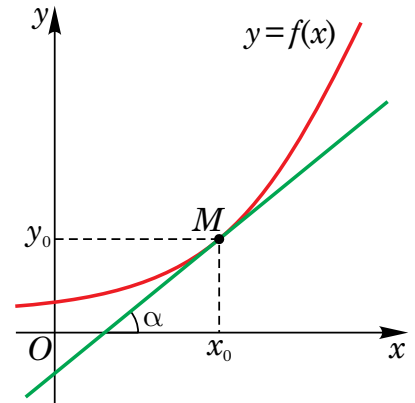
Тоді $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{1} = 3$. Оскільки $k = \operatorname{tg} \alpha = 3$, то $\alpha = \operatorname{arctg} 3$.

Відповідь. $\operatorname{arctg} 3$.

IV. Означення дотичної, проведеної до графіка функції, як граничне положення січної

Точка N рухається по графіку функції і наближається до точки M . При цьому вона може як завгодно близько наблизитися до точки M . Звичайно, що тоді зменшується приріст аргументу, тобто $\Delta x \rightarrow 0$ (прямує до нуля), та приріст функції, тобто $\Delta f \rightarrow 0$ (прямує до 0).

У такому випадку січну MN називають **дотичною** до графіка функції $y = f(x)$ в точці (x_0, y_0) . Кутовим коефіцієнтом дотичної є число $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha$, де α — кут перетину



дотичної з додатним напрямом осі Ox . Наприклад, якщо

$\Delta x = 0,0000006$, $\Delta f = 0,0000012$, то $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0,0000012}{0,0000006} = 2$. Тоді кут перетину дотичної

з додатним напрямом осі Ox становить $\alpha = \arctg 2$.

Також, це означає, що кутовий коефіцієнт дотичної проведений в точці x_0 може бути визначений $k(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$.

За допомогою введених позначень приростів відношення

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

називають **середньою швидкістю зміни функції** на проміжку з кінцями x_0 і $x_0 + \Delta x$.

Ілюстративні приклади

- 5.** Знайдіть формулу для обчислення кутового коефіцієнта дотичної до графіка функції $f(x) = -x^2$ у точці з абсцисою x_0 . Який кут з додатним напрямком осі абсцис утворює дотична, проведена до цього графіка в точці з абсцисою $x_0 = -\frac{1}{2}$?

Розв'язання. Маємо $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = -(x_0 + \Delta x)^2 - (-x_0^2) = -2x_0\Delta x - \Delta x^2$.

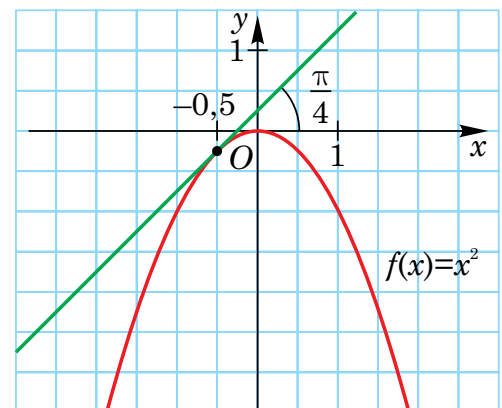
Тоді, скориставшись формулою для обчислення кутового коефіцієнта дотичної, можна записати:

$$\begin{aligned} k(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2x_0\Delta x - \Delta x^2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-2x_0 - \Delta x) = -2x_0. \end{aligned}$$

Ця формула дозволяє обчислити кутовий коефіцієнт дотичної до параболи $y = -x^2$ у будь-якій

точці, зокрема в точці з абсцисою $x_0 = -\frac{1}{2}$.

$$\text{Маємо } k\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1.$$



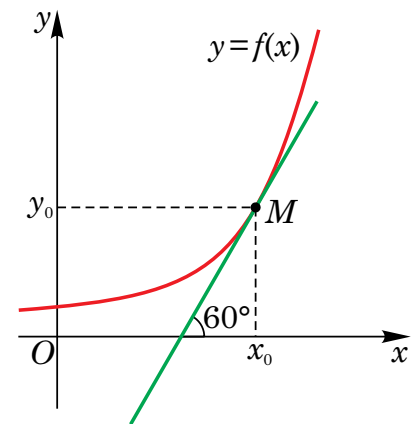
Нехай дотична до параболи в точці з абсцисою $x_0 = -\frac{1}{2}$ утворює кут α ($0 \leq \alpha < \pi, \alpha \neq \frac{\pi}{2}$) з додатним напрямком осі абсцис. Тоді її кутовий коефіцієнт дорівнює $\operatorname{tg} \alpha$. Вище ми встановили, що $k\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$. Звідси $\operatorname{tg} \alpha = 1$. Оскільки $0 \leq \alpha < \pi$, то $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Відповідь. $\frac{\pi}{4}$.

- 6.** Дотична, проведена до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 , утворює з додатним напрямком осі Ox кут 60° (див. рисунок). Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної.

Розв'язання. Оскільки кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює тангенсу кута, який утворює пряма з додатним напрямком Ox , то $k = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$.

Відповідь. $\sqrt{3}$.



V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (8 – 10 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Рух повітряної кулі описується функцією $h = f(t)$, де h — висота над землею (в метрах, t — час (у хвилинах)). Відомо, що за перші 6 хвилин куля піднялася з нульової висоти до 170 метрів. У часовому проміжку від 6-ої хвилини до 8-ої хвилини висота підняття кулі збільшувалася на 40 метрів за кожну хвилину.

1. Знайдіть різницеве відношення приросту функції до приросту аргументу впродовж перших 6 хвилин підняття кулі.
2. Знайдіть кутовий коефіцієнт січної до графіка $h = f(t)$, що проходить через точки $C(6; h(6))$ і $D(8; h(8))$.
3. Порівняйте отримані коефіцієнти та зробіть висновки.

Розв'язання. Нехай функція $h = f(t)$, де t — час (у хвилинах), задає траєкторію руху повітряної кулі. Відомо, що $h(0) = 0$, $h(6) = 170$ (м) — висота підйом кулі після шостої хвилини.

З шостої хвилини до восьмої хвилини куля підіймалася на 40 м за кожну хвилину. Отже, $h(8) = h(6) + 2 \cdot 40 = 170 + 80 = 250$ (м).

1. Знайдемо різницеве відношення приросту функції до приросту аргументу впродовж перших шести хвилин підйому кулі:

$\Delta t = 6 - 0 = 6$ — приріст аргументу,

$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(6) - h(0)}{6} = \frac{170 - 0}{6} = 28,(\overline{3})$ — відношення приросту функції до приросту аргументу.

Отже, $k_1 = 28,(\overline{3})$ — кутовий коефіцієнт січної графіка функції.

2. Якщо січна проходить через точки $C(6; h(6))$ і $D(8; h(8))$, то:

$\Delta t = 8 - 6 = 2$ — приріст аргументу.

Оскільки $h(8) = 250$, $h(6) = 170$, то $k_2 = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(8) - h(6)}{2} = \frac{250 - 170}{2} = 40$ — відношення приросту висоти до приросту часу, тобто кутовий коефіцієнт січної графіка функції $h = f(t)$. Отже, $k_2 = 40$ — кутовий коефіцієнт січної графіка функції, яка проходить через задані точки.

3. Оскільки $k_2 > k_1$, то можна зробити висновок, що після 6-ої хвилини куля почала швидше підніматися вгору.

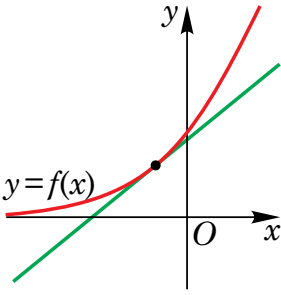
Відповідь. 1. 28,(3). 2. 40. 3. Куля почала підніматися швидше.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

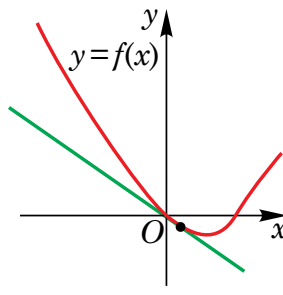
Рівень А

1. Дано функцію $r(x) = x^3 - 6x^2 + 3x$.
 - 1) Знайдіть відношення приросту функції до приросту аргументу.
 - 2) Обчисліть кутові коефіцієнти дотичних у точках $x_0 = 0$ і $x_0 = 3$.
 - 3) Розташуйте значення коефіцієнтів дотичної за зростанням (нанесіть на координатну вісь).
2. Вартість акцій компанії описується функцією $g(x) = 2x^2 - 3x + 20$, де x — місяці від початку року, $g(x)$ — ціна акції у гривнях.
 - 1) Знайдіть кутовий коефіцієнт січної між 2-м і 5-м місяцем.
 - 2) Обчисліть кутовий коефіцієнт дотичної у 4-му місяці.
 - 3) Що це означає для інвестора?
3. Використовуючи дотичні проведені до графіків функції, розташуйте рисунки в порядку зростання кутових коефіцієнтів:

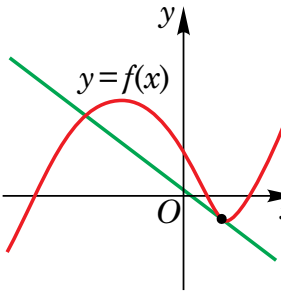
1)



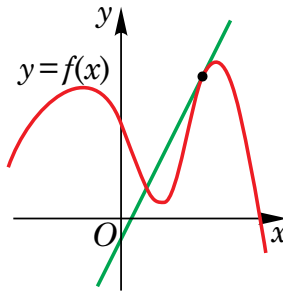
2)



3)



4)


4. Дано функцію $g(x) = -0,5x^2 + 4$.
 - 1) Використовуючи різницеве відношення, знайдіть значення кутового коефіцієнта січної, яка проходить через точки з абсцисам $x_1 = 2$ і $x_2 = -2$.
 - 2) Побудуйте схематичний графік функції $g(x)$ та січної через задані точки.

- 5.** Дано функцію $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2x - 7$.
- 1) Обчисліть середню швидкість зміни функції $f(x)$ на відрізку $[1; 4]$.
 - 2) Знайдіть миттєву швидкість зміни функції в точці $x = 2$.
 - 3) Порівняйте середню та миттєву швидкості зміни функції і зробіть висновок.

Рівень В

- 1.** Знайдіть кутовий коефіцієнт:
- 1) січної графіка функції $y = x^2$, яка проходить через точки графіка з абсцисами $x_0 = 1, x_1 = 1,6$;
 - 2) січної графіка функції $y = x^3$, яка проходить через точки графіка з абсцисами $x_0 = 2$ і $x_1 = 1$;
 - 3) дотичної до графіка функції $y = x^3$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$.
- 2.** Побудуйте прямі, які проходять через точку $(1; 3)$ і мають кутові коефіцієнти:
- 1) -1 і 2 ;
 - 2) $\frac{1}{2}$ і -3 ;
 - 3) 3 і -2 ;
 - 4) $-\frac{1}{2}$ і -2 .
- З'ясуйте в кожному з випадків, який кут (тупий або гострий) утворюють ці прямі з віссю абсцис.
- 3.** Знайдіть кутовий коефіцієнт січної до графіка функції $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, що проходить через точки з даними абсцисами x_1 і x_2 . Який кут (гострий чи тупий) утворює січна з віссю Ox , якщо:
- 1) $x_1 = 0, x_2 = 1$;
 - 2) $x_1 = -1, x_2 = -2$;
 - 3) $x_1 = 1, x_2 = 2$;
 - 4) $x_1 = -1, x_2 = 0$?
- 4.** Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції $f(x)$ у точці з абсцисою x_0 .
- 1) $f(x) = x^4, x_0 = -2$;
 - 2) $f(x) = \sqrt[3]{x}, x_0 = 27$;
 - 3) $f(x) = \frac{1}{x^3}, x_0 = -3$;
 - 4) $f(x) = \cos x, x_0 = -\frac{\pi}{2}$.
- 5.** Дано функцію $g(x) = x^3 + 2x$.
- 1) Використовуючи різницеве відношення між $x_1 = 1$ і $x_2 = 2$, знайдіть кутовий коефіцієнт січної.
 - 2) Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної в точці $x_0 = 1$.
 - 3) Побудуйте схематично графік функції та обидві прямі (січну і дотичну), які проходять через задані точки.
- 6.** Дано функцію $h(x) = \sqrt{x+3}$.
- 1) Знайдіть середній приріст на відрізку $[1; 4]$.
 - 2) Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної в точці $x_0 = 1$.
 - 3) Який кут утворює дотична з віссю Ox ?
- 7.** Дано функцію $f(x) = \frac{1}{x} + 4x$.
- 1) Обчисліть середню швидкість зміни функції на відрізку $[1; 2]$.
 - 2) Знайдіть миттєву швидкість зміни функції в точці $x = 1,5$.

8. Дано функцію $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$.
- 1) Обчисліть середню швидкість зміни функції на відрізку $[-1; 2]$.
 - 2) Знайдіть миттєву швидкість зміни функції в точці $x = 0$.
 - 3) Поясніть, чи збігається середня та миттєва швидкості зміни в цій точці.

Рівень С

1. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до параболи $y = x^2$ точці з абсцисою $x_0 = 1$.
2. Знайдіть кут нахилу параболи $y = x^2 - x + 1$ до осі Ox в точці $x_0 = -1$.
3. Знайдіть кут, під яким парабола $y = x^2 + x$ перетинає вісь Ox .
4. Знайдіть гострі кути, утворені при перетині параболи $x^2 - 4y = 0$ та прямої $x - 2y + 4 = 0$.
5. Знайдіть гострі кути, що утворені при перетині парабол $y^2 = 4x$ та $x^2 = \frac{1}{2}y$.
6. Дано функцію $f(x) = 0,5x^3 - 2x^2 + 3$. Знайдіть значення x , для якого кутовий коефіцієнт дотичної до графіка цієї функції дорівнює -1 .
7. Дано функцію $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$. Знайдіть, у який момент часу x миттєва швидкість зміни функції $f(x)$ дорівнює 3 .

VII. Рефлексія (1–2 хв)

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмю
- 4) Найскладнішим для мене було
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
- 6) Найбільше мені сподобалося

Можливі теми проєктів

1. Дослідження січної прямої на прикладі реальних графіків залежності величин.
2. Візуалізація переходу від січної до граничного положення — дотичної — на комп'ютерних моделях.
3. Побудова та порівняння кутових коефіцієнтів для різних відрізків і точок графіка функції.
4. Дослідження геометричного змісту нахилу прямої та його практичного значення у прикладних задачах.
5. Розробка скриптів або мініпрограм для обчислення нахилу дотичної у заданій точці для різних функцій.

Список використаної літератури

- 1) Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра: підручник для 11 кл. з поглибленим вивченням математики: у 2 ч. — Х. : Гімназія, 2011. — Ч.1. — 256 с. : іл.
- 2) Запорожченко О.Є., Шинковська І.Л., Заєць І.П. Застосування похідної: Навч. посібник. — Дніпропетровськ: НМетАУ, 2012. — 53 с.