

Урок 3. Урок —практикум. Обчислення кутових коефіцієнтів дотичних, проведених до графіків функцій

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) зрозумієте, як формується різницеве відношення приросту функції до приросту аргументу;
- 2) навчитеся обчислювати границю різницевого відношення приросту функції до приросту аргументу;
- 3) навчитеся за допомогою границі різницевого відношення обчислювати кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції у точці;
- 4) навчитеся практично обчислювати приріст, різницеве відношення та кутовий коефіцієнт дотичної;
- 5) розв'яжете практичну задачу, де застосуєте знання про знаходження середньої та миттєвої швидкості зміни функції.

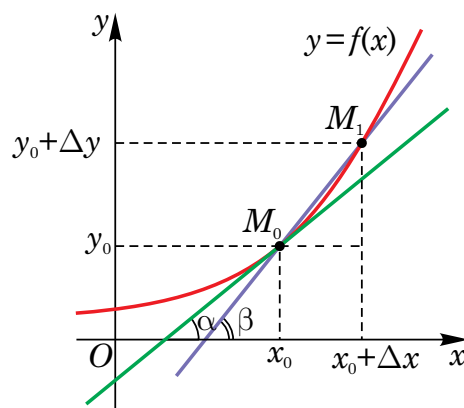
II. Повторення

1. Знайдіть швидкість зміни функції $g(x) = \sqrt{x+4}$ на проміжку $[0; 5]$.
2. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1}}{x}$.
3. Обчисліть границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{4n+1} + \sqrt{n+3}}$.

III. Обчислення кутових коефіцієнтів. дотичних, проведених до графіків функцій

Розглянемо випадок, коли деяка крива задана в декартовій системі координат рівнянням $y = f(x)$, де $f(x)$ — деяка функція, задана на проміжку $(a; b)$.

Візьмемо на кривій точку $M_0(x_0; y_0)$ проведемо дотичну до графіка функції. Оберемо точку M_1 , позначимо її координати через $x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y$. Через точки M_0 і M_1 проведемо січну M_0M_1 . Кут, який утворює січна M_0M_1 з додатним напрямком осі Ox , позначимо β . Тоді $\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.



Нехай точка M_1 прямує вздовж кривої до точки M_0 . Тоді координати точки $M_1(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ наближатимуться як завгодно близько відповідно до координат точки $M_0(x_0, y_0)$, тобто $\lim_{M_1 \rightarrow M_0} (x_0 + \Delta x) = x_0$, $\lim_{M_1 \rightarrow M_0} (y_0 + \Delta y) = y_0$.

Із цих співвідношень випливає, що $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, якщо $M_1 \rightarrow M_0$. При цьому пряма M_0M_1 наближається до свого граничного положення — прямої M_0T , яка, згідно припущення, і є дотичною до графіка функції в точці M_0 .

Позначимо кут, утворений цією дотичною з додатним напрямком осі Ox , через α . Тоді кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює $\operatorname{tg} \alpha$.

Якщо $\Delta x \rightarrow 0$, то кут β прямує до кута α . Отже, $\operatorname{tg} \beta \rightarrow \operatorname{tg} \alpha$. Оскільки $\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то отримаємо співвідношення $\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Теорема. Якщо графік функції $y = f(x)$, де функція $f(x)$ є неперервною на проміжку $(a; b)$ має в точці M_0 дотичну, яка не паралельна осі Oy , то кутовий коефіцієнт дотичної визначається співвідношенням $\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Справедлива і обернена теорема.

Теорема. Якщо існує границя $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k$, то в точці M_0 існує дотична до графіка функції $y = f(x)$ і її кутовий коефіцієнт дорівнює k .

Доведення. Нехай існує границя $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Тоді рівняння прямої $y = kx + b$ можна записати у вигляді $y - y_0 = k(x - x_0)$. Дане рівняння задає пряму, що проходить через точку M_0 . Покажемо, що ця пряма є дотичною до графіка функції $y = f(x)$ у точці M_0 .

Справді, якщо $\Delta x \rightarrow 0$, то точка M_1 прямує вздовж графіка до точки M_0

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = k.$$

Отже, існує границя кутового коефіцієнта січної $M_0 M_1$ при $\Delta x \rightarrow 0$, яка дорівнює k . Тоді задана пряма є дотичною в точці M_0 , де кутовий коефіцієнт визначається відношенням $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Із сформульованих теорем випливає критерій існування дотичної до графіка функції $y = f(x)$. Для того щоб крива $y = f(x)$, де функція $f(x)$ є неперервною на проміжку $(a; b)$, мала в точці M_0 дотичну, необхідно і достатньо, щоб існувала границя $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

При виконанні цієї умови пряма $y - y_0 = k(x - x_0)$ є дотичною.

Якщо $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$, то графік у точці M_0 має дотичну, паралельну осі Oy .

Приклад 1. Доведіть, що дотичною до параболи $y = x^2$ у точці $M_0(0; 0)$ є вісь абсцис.

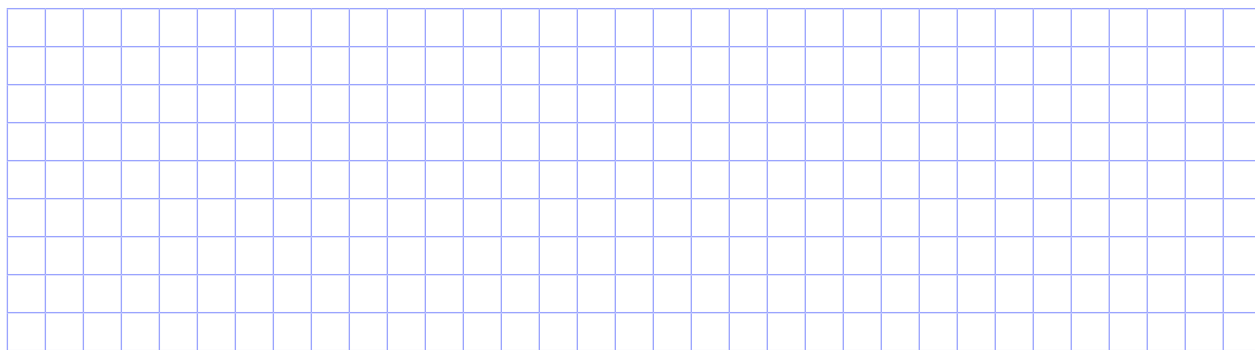
Доведення. Визначимо кутовий коефіцієнт дотичної. Знайдемо приріст функції $f(x) = x^2$ у точці $x_0 = 0$. Приріст Δy визначається формулою $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, де $\Delta x = x - x_0$ — приріст аргументу. У цьому випадку $\Delta y = \Delta x^2$.

Тоді $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x$ і $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0$.

Отже, кутовий коефіцієнт k дотичної до параболи $y = x^2$ у точці $M_0(0; 0)$ існує і дорівнює нулю, тобто $k = 0$.

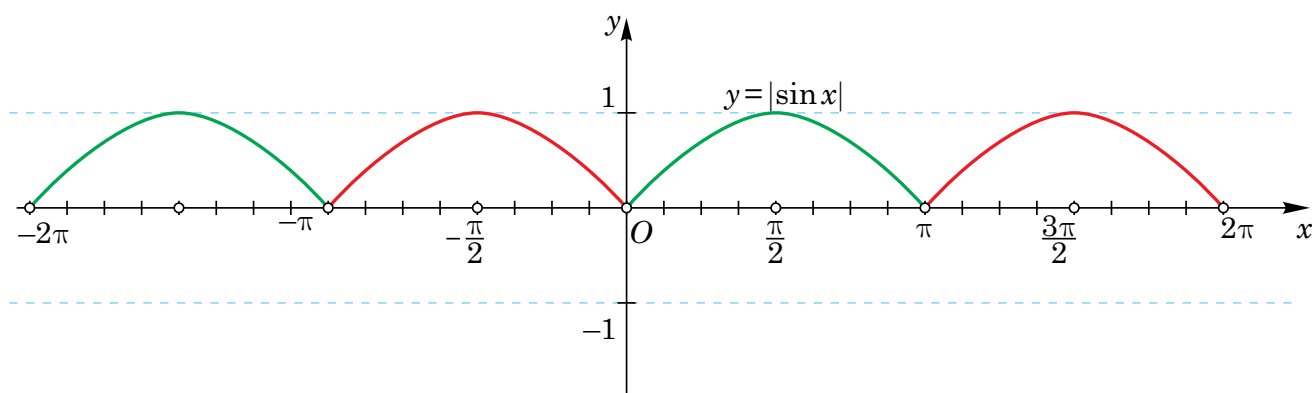
Підставимо значення $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $k = 0$ і отримаємо рівняння дотичної прямої $y = 0$. Це рівняння осі абсцис.

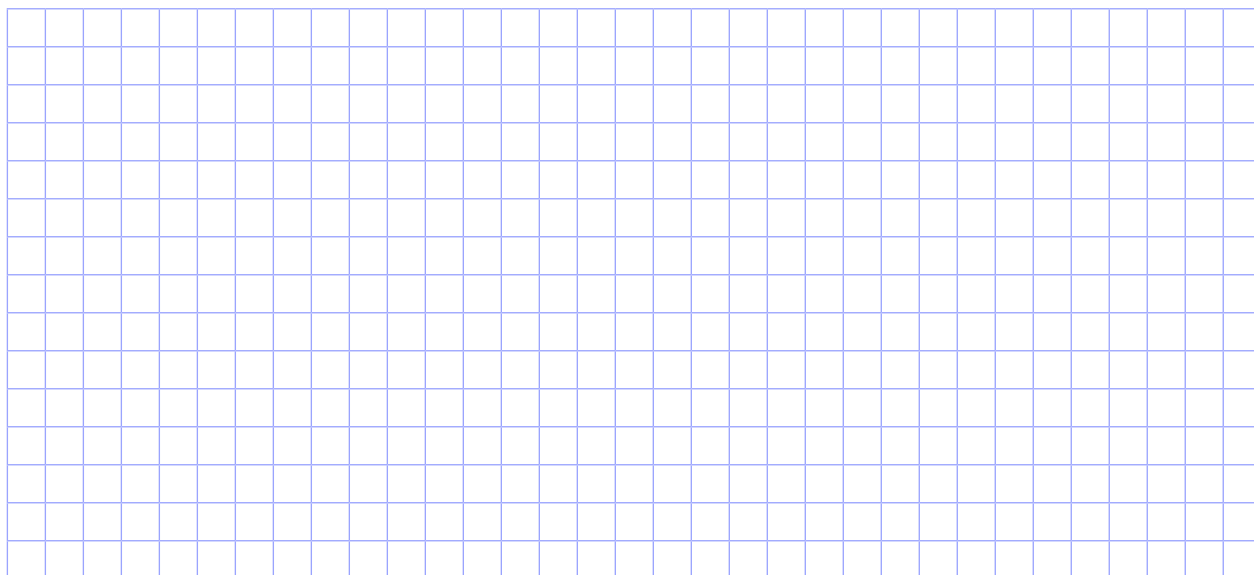
Приклад 2. Знайдіть рівняння дотичної до синусоїди $y = \sin x$ у точці $M_0\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$.



Приклад 3. Нехай графік задано рівнянням $y = |\sin x|$. Доведіть, що у точках з абсцисами $x = \pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$ і ординатами $y = 0$, не існує дотичної до графіка функції.

Доведення. Використайте графік (див. рисунок).





IV. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Науковці використовують пристрій, що вимірює кількість бактерій, які ростуть у чашці Петрі, і ця кількість описується формулою $N(t) = 50t^2 - 5t + 100$, де $N(t)$ — кількість бактерій, а t — час у днях. Спочатку бактерій небагато, тому популяція збільшується повільно. З часом бактерій стає більше, вони діляться швидше, тому популяція різко зростає. Пізніше поживних речовин стає менше і ріст сповільнюється.

- 1) Яка кількість бактерій буде у чашці Петрі через 3 дні?
- 2) На скільки збільшиться кількість бактерій у період з 3-го до 10-й день?
- 3) З якою середньою швидкістю зростає популяція за час від 3-го до 10-го дня?
- 4) Яка швидкість зростання популяції на 3-й день?

V. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Для функції $y = 2x$ знайдіть приріст Δy , який відповідає приросту аргумента Δx у точці x_0 :
 - 1) $x_0 = 1,5, \Delta x = 3,5$;
 - 2) $x_0 = 0,5, \Delta x = 2,5$.
2. Закон руху матеріальної точки по прямій задано формулою $x = x(t)$, де x — координата точки в момент часу t . Знайдіть:
 - середню швидкість руху точки на відрізку $[2; 4]$;
 - миттєву швидкість руху точки при $t = 2$, якщо:
 - 1) $x(t) = 3t + 4$;
 - 2) $x(t) = -2t + 1$;
 - 3) $x(t) = 5t - 7$;
 - 4) $x(t) = -3t - 2$.
3. Запишіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 :
 - 1) $f(x) = x^2, x_0 = 3$;
 - 2) $f(x) = x, x_0 = 8$;
 - 3) $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = -1$;
 - 4) $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 0,25$.

- 4.** Для функції $f(x)$ і точки x_0 знайдіть $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ і $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$:
- 1) $f(x) = 5x + 1$; 2) $f(x) = -3x + 4$; 3) $f(x) = 7x - 5$; 4) $f(x) = 2x + 10$.
- 5.** Для функції $f(x) = x^3 - 3x + 1$ і точки $x_0 = 2$ знайдіть приріст функції Δy , якщо приріст аргументу $\Delta x = 0,1$. Запишіть аналітичний вираз приросту.
- 6.** Для функції $f(x)$ знайдіть різницеве відношення при умові, що приріст аргументу $\Delta x \rightarrow 0$:
- 1) $f(x) = 2x^3 - 3x$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = 0,5x^2 - 2x + 2$, $x_0 = 0$;
 3) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$; 4) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{5\pi}{2}$.

Рівень В

- 1.** Знайдіть приріст Δy , який відповідає приросту аргументу Δx у точці x_0 для функції:
- 1) $y = 3x$; 2) $y = x^3$; 3) $y = x^2 - x$; 4) $y = x + \frac{1}{x}$.
- 2.** Закон руху матеріальної точки по прямій задано формулою $x = x(t)$, де x — координата точки в момент часу t . Знайдіть:
- середню швидкість руху точки на відрізку $[3; 5]$;
 — миттєву швидкість руху точки при $t = 3$;
 — час, коли миттєва швидкість дорівнює нулю (якщо це можливо).
- 1) $x(t) = t^2 + 2t + 1$; 2) $x(t) = t^3 - 3t^2 + 2$; 3) $x(t) = t^2 + 4t$; 4) $x(t) = \sin t + t$.
- 3.** Запишіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 :
- 1) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = 2x + 5$, $x_0 = -2$;
 3) $f(x) = \frac{1}{x} + x^2$, $x_0 = 1$; 4) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$, $x_0 = 1$.
- 4.** Знайдіть усі значення аргументу x , при яких кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = f(x)$ дорівнює нулю:
- 1) $f(x) = x^4 - 4x^2$; 2) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$; 3) $f(x) = \cos x + 2x$; 4) $f(x) = \operatorname{tg} x - x$.
- 5.** Для функції $f(x)$ і точки x_0 знайдіть $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ і $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$:
- 1) $f(x) = (x - 1)(x + 2)$; 2) $f(x) = x^2 \cdot \sin x$,
 3) $f(x) = \frac{x^2}{x - 2}$; 4) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.
- 6.** Побудуйте графік функції $y = \frac{4}{x}$ і проведіть до нього дотичну в точці $T(2; 2)$. Знайдіть знак кутового коефіцієнта цієї дотичної.
- 7.** Знайдіть приріст функції у вигляді аналітичної формули для загального Δx :
- 1) $f(x) = x^2 + 2x$; 2) $f(x) = \sqrt{x}$; 3) $f(x) = \frac{2}{x}$; 4) $f(x) = x^3$.
- 8.** Для функції $y = f(x)$ і точки x_0 знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної, визначте його знак, зробіть висновок, який кут утворює дотична з додатним напрямом осі Ox :
- 1) $f(x) = x^2 - 2x$, $x_0 = -1$; 2) $f(x) = -x^2 + 3x$, $x_0 = 2$;
 3) $f(x) = \sqrt{x + 1}$, $x_0 = 0$; 4) $f(x) = \frac{x}{x + 1}$, $x_0 = 1$.

Рівень С

1. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної у точці x_0 через границю різницевого відношення:
 - 1) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x, x_0 = 1$;
 - 2) $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}, x_0 = 2$;
 - 3) $f(x) = \sqrt{x+4}, x_0 = 0$;
 - 3) $f(x) = \operatorname{tg} x + x, x_0 = 0$.
2. Знайдіть усі значення аргументу x , при яких дотична до графіка функції $y = f(x)$ паралельна осі Ox :
 - 1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$;
 - 2) $f(x) = x^2 + 1$;
 - 3) $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$;
 - 4) $f(x) = \sin(2x) + x$.
3. Для функції $f(x)$ і точки x_0 знайдіть $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ і $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$:
 - 1) $f(x) = \sqrt{2x+3}$;
 - 2) $f(x) = \sin(3x)$;
 - 3) $f(x) = \cos(x^2)$;
 - 4) $f(x) = \sqrt{\sin x}$.
4. Побудуйте графік функції $y = \sqrt{2x+1}$ і проведіть до нього дотичну в точці з абсцисою $x_0 = 4$. Знайдіть знак кутового коефіцієнта цієї дотичної.
5. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $f(x)$ у точці x_0 :
 - 1) $f(x) = ax^2, x_0 = -1$;
 - 2) $f(x) = \sqrt{ax+1}, x_0 = 0$;
 - 3) $f(x) = \sin(ax), x_0 = 0$;
 - 4) $f(x) = x^2 + ax, x_0 = -2$.
6. Знайдіть значення параметра a , при якому дотична у заданій точці буде паралельна осі абсцис:
 - 1) $f(x) = ax^2 + 2x, x_0 = 1$;
 - 2) $f(x) = \sqrt{ax+4}, x_0 = 0$;
 - 3) $f(x) = x^3 + ax, x_0 = -1$;
 - 4) $f(x) = \frac{x^2}{a+x}, x_0 = 1$.

Рефлексія. «Самооцінка»

- 1) Що нового я сьогодні дізнався/дізналася про дотичну?
- 2) Що мені вдалося найкраще?
- 3) Що залишилось незрозумілим або потребує додаткового опрацювання?
- 4) Де я можу застосувати знання про кутовий коефіцієнт дотичної у практичних задачах або в інших предметах?
- 5) Моя оцінка власної роботи на уроці, за шкалою від 1 до 5.
- 6) Поради собі до наступного уроку.

Можливі теми проєктів

1. Пошук прикладів застосування дотичних у фізиці або техніці (рух, траєкторії, миттєва швидкість).
2. Розрахунок кутового коефіцієнта дотичної для прикладної задачі, наприклад рух автомобіля.
3. Побудова дотичних у GeoGebra або іншій програмі.
4. Історія поняття дотичної та похідної.

