

Урок 3. Урок —практикум. Обчислення кутових коефіцієнтів дотичних, проведених до графіків функцій

Тип уроку: застосування знань, умінь і навичок.

План уроку

1. Обчислення приросту функції у деякій точці.
2. Обчислення границь різницевих відношень приростів функції до приростів аргументів.
3. Обчислення кутових коефіцієнтів. дотичних, проведених до графіків функцій.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

визначає компоненти математичної моделі специфічної проблемної ситуації, їх достатність і взаємозв'язки між ними [12 МАО 2.3.1–1 П];

використовує різні форми подання математичних об'єктів відповідно до специфіки проблемної ситуації [12 МАО 4.2.2–2 П];

обґрунтовано пояснює хід своїх міркувань, зважаючи на мету і учасників спілкування [12 МАО 4.3.2–2 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Формулюйте мотиваційні ситуації, які запропоновані на початку уроку.
- 2) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.
- 3) Подані ілюстративні приклади можна використовувати як опорні задачі.
- 4) Обирайте ілюстративні приклади на свій розсуд.
- 5) Обирайте кількість і зміст матеріалу на власний розсуд.
- 6) Обов'язково пропонуйте останні блоки уроку, а саме: розв'язування практичної задачі, та тренувальні вправи як важливий компонент формування практичних навиків і навчання учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

7) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Можливі теми для створення проєктів запропоновані.

I. Організаційна частина (2–3 хв)

Мотиваційні запитання

1) Аналітику потрібно в'яснити, як швидко змінюється кількість відвідувачів сайту у певний момент часу. Він знає, скільки відвідувачів заходить на сайт кожної години, але хоче дізнатися, як швидко збільшується кількість відвідувачів саме через 10 годин після початку доби. Як можна визначити, з якою швидкістю у цей момент змінюється кількість відвідувачів, якщо відомі зміни користувачів за короткі проміжки часу?

2) Інженер спостерігає, як змінюється використання пам'яті сервером протягом хвилини. Йому важливо зрозуміти, як швидко зростає споживання пам'яті саме на 4-й хвилині, щоб вчасно підготуватися до можливого перевантаження. Як можна визначити, з якою швидкістю в цей момент зростає використання пам'яті сервером, якщо відома зміна за короткий проміжок часу?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Знайдіть швидкість зміни функції $g(x) = \sqrt{x+4}$ на проміжку $[0; 5]$.

Відповідь. 0,2.

2. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}+1}{x}$.

Відповідь. $\sqrt{2}$.

3. Обчисліть границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{4n+1} + \sqrt{n+3}}$.

Відповідь. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Як я вирішую певну проблему?

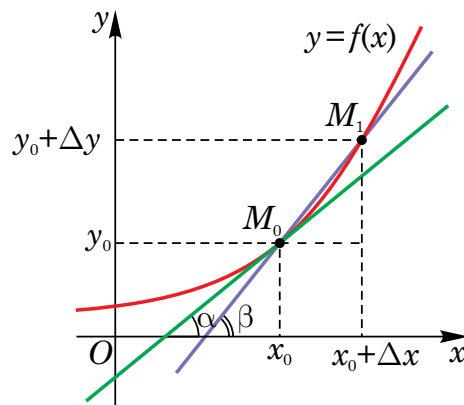
Задача. Науковці використовують пристрій, що вимірює кількість бактерій, які ростуть у чашці Петрі, і ця кількість описується формулою $N(t) = 50t^2 - 5t + 100$, де $N(t)$ — кількість бактерій, а t — час у днях. Спочатку бактерій небагато, тому популяція збільшується повільно. З часом бактерій стає більше, вони діляться швидше, тому популяція різко зростає. Пізніше поживних речовин стає менше і ріст сповільнюється.

- 1) Яка кількість бактерій буде у чашці Петрі через 3 дні?
- 2) На скільки збільшиться кількість бактерій у період з 3-го по 10-й день?
- 3) З якою середньою швидкістю зростає популяція за час від 3-го до 10-го дня?
- 4) Яка швидкість зростання популяції на 3-й день?

III. Обчислення кутових коефіцієнтів. дотичних, проведених до графіків функцій

Розглянемо випадок, коли деяка крива задана в декартовій системі координат рівнянням $y = f(x)$, де $f(x)$ — деяка функція, задана на проміжку $(a; b)$.

Візьмемо на кривій точку $M_0(x_0; y_0)$ проведемо дотичну до графіка функції. Оберемо точку M_1 , позначимо її координати через $x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y$. Через точки M_0 і M_1 проведемо січну M_0M_1 . Кут, який утворює січна M_0M_1 з додатним напрямком осі Ox , позначимо β . Тоді $\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.



Нехай точка M_1 прямує вздовж кривої до точки M_0 . Тоді координати точки $M_1(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ наближатимуться як завгодно близько відповідно до координат точки $M_0(x_0, y_0)$, тобто $\lim_{M_1 \rightarrow M_0} (x_0 + \Delta x) = x_0$, $\lim_{M_1 \rightarrow M_0} (y_0 + \Delta y) = y_0$.

Із цих співвідношень випливає, що $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, якщо $M_1 \rightarrow M_0$. При цьому пряма M_0M_1 наближається до свого граничного положення — прямої M_0T , яка, згідно припущення, і є дотичною до графіка функції в точці M_0 .

Позначимо кут, утворений цією дотичною з додатним напрямком осі Ox , через α . Тоді кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює $\operatorname{tg} \alpha$.

Якщо $\Delta x \rightarrow 0$, то кут β прямує до кута α . Отже, $\operatorname{tg} \beta \rightarrow \operatorname{tg} \alpha$. Оскільки $\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то отримаємо співвідношення $\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Теорема. Якщо графік функції $y = f(x)$, де функція $f(x)$ є неперервною на проміжку $(a; b)$ має в точці M_0 дотичну, яка не паралельна осі Oy , то кутовий коефіцієнт дотичної визначається співвідношенням $\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Справедлива і обернена теорема.

Теорема. Якщо існує границя $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k$, то в точці M_0 існує дотична до графіка функції $y = f(x)$ і її кутовий коефіцієнт дорівнює k .

Доведення. Нехай існує границя $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Тоді рівняння прямої $y = kx + b$ можна записати у вигляді $y - y_0 = k(x - x_0)$. Дане рівняння задає пряму, що проходить через точку M_0 . Покажемо, що ця пряма є дотичною до графіка функції $y = f(x)$ у точці M_0 .

Справді, якщо $\Delta x \rightarrow 0$, то точка M_1 прямує вздовж графіка до точки M_0

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = k.$$

Отже, існує границя кутового коефіцієнта січної $M_0 M_1$ при $\Delta x \rightarrow 0$, яка дорівнює k . Тоді задана пряма є дотичною в точці M_0 , де кутовий коефіцієнт визначається відношенням $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Із сформульованих теорем випливає критерій існування дотичної до графіка функції $y = f(x)$. Для того щоб крива $y = f(x)$, де функція $f(x)$ є неперервною на проміжку $(a; b)$, мала в точці M_0 дотичну, необхідно і достатньо, щоб існувала границя $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

При виконанні цієї умови пряма $y - y_0 = k(x - x_0)$ є дотичною.

Якщо $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$, то графік у точці M_0 має дотичну, паралельну осі Oy .

Ілюстративні приклади

- 4.** Доведіть, що дотичною до параболи $y = x^2$ у точці $M_0(0; 0)$ є вісь абсцис.

Доведення. Визначимо кутовий коефіцієнт дотичної. Знайдемо приріст функції $f(x) = x^2$ у точці $x_0 = 0$. Приріст Δy визначається формулою $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, де $\Delta x = x - x_0$ — приріст аргументу. У цьому випадку $\Delta y = \Delta x^2$.

Тоді $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x$ і $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0$.

Отже, кутовий коефіцієнт k дотичної до параболи $y = x^2$ у точці $M_0(0; 0)$ існує і дорівнює нулю, тобто $k = 0$.

Підставимо значення $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $k = 0$ і отримаємо рівняння дотичної прямої $y = 0$. Це рівняння осі абсцис.

- 5.** Знайдіть рівняння дотичної до синусоїди $y = \sin x$ у точці $M_0\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$.

Розв'язання. Знайдемо кутовий коефіцієнт дотичної.

Приріст функції: $\Delta y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right) - \sin \frac{\pi}{2} = -2 \sin^2 \frac{\Delta x}{2}$.

Тоді $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2 \sin^2 \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$.

Знайдемо границю цього відношення при $\Delta x \rightarrow 0$.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{-2 \sin^2 \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{-\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \sin \frac{\Delta x}{2} \right) = 0.$$

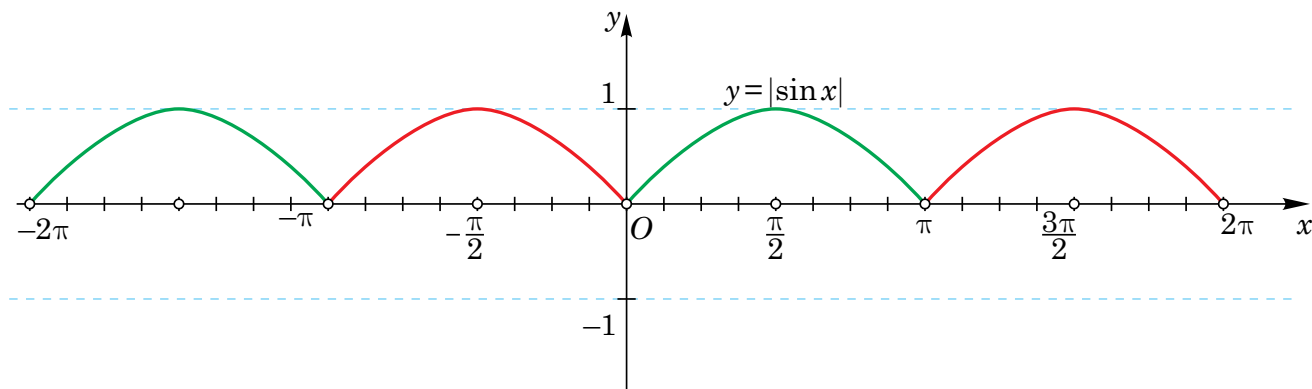
Отже, кутовий коефіцієнт k дотичної до синусоїди в точці $M_0\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ існує і дорівнює нулю, $k = 0$.

Підставимо значення $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $y_0 = 1$, $k = 0$ у рівняння прямої і отримаємо рівняння дотичної $y - 1 = 0$, тобто пряма $y = 1$ є дотичною до синусоїди $y = \sin x$ у точці $M_0\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$.

Відповідь. $y = 1$.

6. Нехай графік задано рівнянням $y = |\sin x|$. Доведіть, що у точках з абсцисами $x = \pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$ і ординатами $y = 0$, не існує дотичної до графіка функції.

Доведення. Розглянемо випадок, коли $x = 0$, $y = 0$



Знайдемо приріст функції $|\sin x|$ у точці $x_0 = 0$, $\Delta y = |\sin \Delta x|$.

Покажемо, що відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\sin \Delta x|}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$ не має границі.

Справді, якщо $\Delta x \rightarrow 0$ і $\Delta x > 0$, то

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ (\Delta x > 0)}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ (\Delta x > 0)}} \frac{|\sin \Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ (\Delta x > 0)}} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Якщо $\Delta x \rightarrow 0$ і $\Delta x < 0$, то

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ (\Delta x < 0)}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ (\Delta x < 0)}} \frac{|\sin \Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ (\Delta x < 0)}} \frac{-\sin \Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Правостороння і лівостороння границі в точці $x = 0$ різні. Тому відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$ границі не має, а отже, не існує кутового коефіцієнта дотичної до графіка у точці $(0; 0)$. Тому заданий графік у цій точці дотичної не має.

За допомогою границі можна розв'язувати досить важливі задачі з механіки, фізики та геометрії. Якщо у задачі можна розглянути одну з величин як незалежну змінну і позначити її через x , а іншу величину як залежну і позначити її y , то швидкість зміни функції можна знайти за допомогою граничного переходу у відношенні $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$, тобто за допомогою границі $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Цю границю та її зміст буде розглянуто на наступних уроках.

IV. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (8–10 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Науковці використовують пристрій, що вимірює кількість бактерій, які ростуть у чашці Петрі, і ця кількість описується формулою $N(t) = 50t^2 - 5t + 100$, де $N(t)$ — кількість бактерій, а t — час у днях. Спочатку бактерій небагато, тому популяція збільшується повільно. З часом бактерій стає більше, вони діляться швидше, тому популяція різко зростає. Пізніше поживних речовин стає менше і ріст сповільнюється.

1) Яка кількість бактерій буде у чашці Петрі через 3 дні?

- 2) На скільки збільшиться кількість бактерій у період з 3-го по 10-й день?
- 3) З якою середньою швидкістю зростає популяція за час від 3-го до 10-го дня?
- 4) Яка швидкість зростання популяції на 3-й день?

Розв'язання.

1) Знайдемо кількість бактерій, яка буде у чашці Петрі через 3 дні:

$$N(3) = 50 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 100 = 50 \cdot 9 - 15 + 100 = 450 - 15 + 100 = 535.$$

Отже, через 3 дні буде 535 бактерій.

$$2) N(10) = 50 \cdot 10^2 - 5 \cdot 10 + 100 = 5000 - 50 + 100 = 5050.$$

$$\text{Приріст популяції } \Delta N = N(10) - N(3) = 5050 - 535 = 4515.$$

Отже, кількість бактерій збільшиться на 4515.

3) Середня швидкість зростання знаходиться як відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$V_c = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(10) - N(3)}{10 - 3} = 4515 : 7 \approx 645.$$

Отже, середня швидкість зростання популяції становить приблизно 645 бактерій на день.

4) Знайдемо миттєву швидкість як границю різницевого відношення за означенням:

$$V_M = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(3 + \Delta t) - N(3)}{\Delta t}.$$

Спочатку знайдемо $N(3 + \Delta t)$:

$$N(3 + \Delta t) = 50(3 + \Delta t)^2 - 5(3 + \Delta t) + 100.$$

Розкриємо дужки:

$$N(3 + \Delta t) = 50(9 + 6\Delta t + \Delta t^2) - 5(3 + \Delta t) + 100 = 450 + 300\Delta t + 50\Delta t^2 - 15 - 5\Delta t + 100 = 535 + 295\Delta t + 50\Delta t^2.$$

Тоді різницеве відношення:

$$\frac{N(3 + \Delta t) - N(3)}{\Delta t} = \frac{535 + 295\Delta t + 50\Delta t^2}{\Delta t} = \frac{535}{\Delta t} + 295 + 50\Delta t.$$

$$\text{Отже, } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{535}{\Delta t} + 295 + 50\Delta t \right) = 295.$$

Отже, миттєва швидкість зростання популяції на 3-й день дорівнює 295 бактерій на день.

Відповідь. 1) 535 бактерій; 2) на 4515 бактерій; 3) 645 бактерій на день; 4) 295 бактерій.

V. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Для функції $y = 2x$ знайдіть приріст Δy , який відповідає приросту аргумента Δx у точці x_0 :
 - 1) $x_0 = 1,5$, $\Delta x = 3,5$;
 - 2) $x_0 = 0,5$, $\Delta x = 2,5$.
2. Закон руху матеріальної точки по прямій задано формулою $x = x(t)$, де x — координата точки в момент часу t . Знайдіть:
 - середню швидкість руху точки на відрізку $[2; 4]$;
 - миттєву швидкість руху точки при $t = 2$, якщо:
 - 1) $x(t) = 3t + 4$;
 - 2) $x(t) = -2t + 1$;
 - 3) $x(t) = 5t - 7$;
 - 4) $x(t) = -3t - 2$.

8. Для функції $y = f(x)$ і точки x_0 знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної, визначте його знак, зробіть висновок, який кут утворює дотична з додатним напрямом осі Ox :
- 1) $f(x) = x^2 - 2x, x_0 = -1$;
 - 2) $f(x) = -x^2 + 3x, x_0 = 2$;
 - 3) $f(x) = \sqrt{x+1}, x_0 = 0$;
 - 4) $f(x) = \frac{x}{x+1}, x_0 = 1$.

Рівень С

1. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної у точці x_0 через границю різницевого відношення:
 - 1) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x, x_0 = 1$;
 - 2) $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}, x_0 = 2$;
 - 3) $f(x) = \sqrt{x+4}, x_0 = 0$;
 - 3) $f(x) = \operatorname{tg} x + x, x_0 = 0$.
2. Знайдіть усі значення аргументу x , при яких дотична до графіка функції $y = f(x)$ паралельна осі Ox :
 - 1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$;
 - 2) $f(x) = x^2 + 1$;
 - 3) $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$;
 - 4) $f(x) = \sin(2x) + x$.
3. Для функції $f(x)$ і точки x_0 знайдіть $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ і $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$:
 - 1) $f(x) = \sqrt{2x+3}$;
 - 2) $f(x) = \sin(3x)$;
 - 3) $f(x) = \cos(x^2)$;
 - 4) $f(x) = \sqrt{\sin x}$.
4. Побудуйте графік функції $y = \sqrt{2x+1}$ і проведіть до нього дотичну в точці з абсцисою $x_0 = 4$. Знайдіть знак кутового коефіцієнта цієї дотичної.
5. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $f(x)$ у точці x_0 :
 - 1) $f(x) = ax^2, x_0 = -1$;
 - 2) $f(x) = \sqrt{ax+1}, x_0 = 0$;
 - 3) $f(x) = \sin(ax), x_0 = 0$;
 - 4) $f(x) = x^2 + ax, x_0 = -2$.
6. Знайдіть значення параметра a , при якому дотична у заданій точці буде паралельна осі абсцис:
 - 1) $f(x) = ax^2 + 2x, x_0 = 1$;
 - 2) $f(x) = \sqrt{ax+4}, x_0 = 0$;
 - 3) $f(x) = x^3 + ax, x_0 = -1$;
 - 4) $f(x) = \frac{x^2}{a+x}, x_0 = 1$.

VI. Рефлексія. «Самооцінка» (2 хв)

Запропонуйте учням/ученицям дати відповіді на запитання (усно або письмово).

- 1) Що нового я сьогодні дізнався/дізналася про дотичну?
- 2) Що мені вдалося найкраще?
- 3) Що залишилось незрозумілим або потребує додаткового опрацювання?
- 4) Де я можу застосувати знання про кутовий коефіцієнт дотичної у практичних задачах або в інших предметах?
- 5) Моя оцінка власної роботи на уроці, за шкалою від 1 до 5.
- 6) Поради собі до наступного уроку.

Можливі теми проєктів

1. Пошук прикладів застосування дотичних у фізиці або техніці (рух, траєкторії, миттєва швидкість).
2. Розрахунок кутового коефіцієнта дотичної для прикладної задачі, наприклад рух автомобіля.
3. Побудова дотичних у GeoGebra або іншій програмі.
4. Історія поняття дотичної та похідної.

Список використаної літератури

- 1) Шкіль М. І. Математичний аналіз : підручник : у 2 ч. Ч. 1. — 3-тє вид., переробл. і допов. — К. : Вища школа, 2005. — 447 с. : іл.
- 2) Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглибленому рівні з 8 кл., профільний рівень : підручник для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. — Харків : Гімназія, 2018. — 512 с. : іл.
- 3) Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підручник для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. — Харків : Вид-во «Ранок», 2018. — 272 с. : іл.