

Урок 4. **Задача про миттєву швидкість**

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) дізнаєтесь, що таке середня швидкість та миттєва швидкість руху матеріальної точки;
- 2) навчитеся знаходити середню та миттєву швидкості як відношення приросту відстані до приросту часу;
- 3) дослідите, що таке прискорення руху точки;
- 4) навчитеся застосовувати отримані знання для розв'язання практичних задач.

II. Повторення

1. Знайдіть приріст функції $y = 5x + 1$, якщо $x_0 = -1$ і $\Delta x = 0,3$.
2. Для функції $y = x^2 - x$ виразіть приріст Δy , якщо $x_0 = 3$, $x = 2,25$.
3. Знайдіть наближене ціле значення кутового коефіцієнта дотичної до графіка функції $y = x^3 - 1$, якщо $x_0 = 2$.

III. Приріст часу та приріст переміщення. Середня швидкість руху тіла

Нехай матеріальна точка рухається по координатній прямій і через час t після початку руху має координату $x(t)$. Тим самим задано функцію $y = x(t)$, яка дає змогу визначити положення точки в будь-який момент часу. Тому цю функцію називають **законом руху точки**.

Зафіксуємо який-небудь момент часу t_0 і надамо аргументу в точці t_0 приріст Δt , тобто розглянемо проміжок часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$. За цей проміжок часу точка здійснить переміщення Δx .

Якщо точка рухається по прямій і відома її координата руху $x(t)$, то середня швидкість руху тіла за проміжок часу $[t_0; t_0 + \Delta t]$ визначається так:

$$v_c(\Delta t) = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}.$$

Нехай у середовищі без опору вільно падає матеріальна точка M . Тоді шлях s , який пройшла точка за час t (відлік часу відбувається на початку падіння), виражається формулою $s = \frac{gt^2}{2}$, де g — прискорення сили тяжіння ($g \approx 9,8 \text{ м/с}^2$).

У цьому випадку точка M здійснює нерівномірний рух (за однакові проміжки часу вона проходить різні відрізки шляху).

Крім часу t розглянемо деякий наступний, близький до нього час $t + \Delta t$ (Δt називають **приростом часу**). Шлях, пройдений точкою за час $t + \Delta t$, позначимо через $s + \Delta s$ (Δs називають **приростом шляху**). Тоді маємо $\Delta s = \frac{g}{2}(2\Delta t + \Delta t^2)$.

Якщо шлях Δs поділити на час Δt , то дістанемо значення середньої швидкості v_c :

$$v_c = gt + \frac{1}{2}g\Delta t.$$

Отже, середня швидкість v_c змінюється зі зміною величини Δt . Отже, чим ближче час $t + \Delta t$ до часу t , тим середня швидкість точніше характеризує швидкість точки M у момент часу t .

Тому за швидкість v у певний момент часу t приймають границю v_c , коли Δt прямує до нуля, тобто $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_c$, звідси $v = gt$.

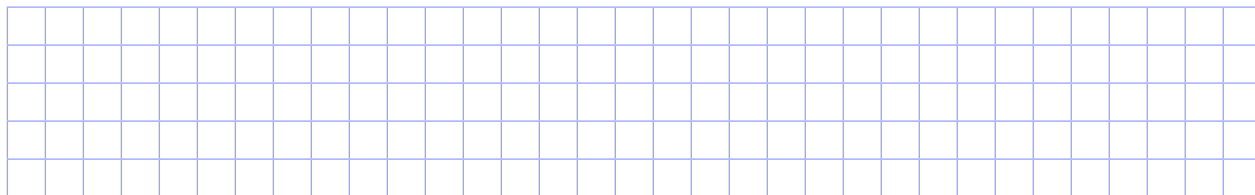
Розглянемо випадок рівномірного прямолінійного руху. Тоді закон (залежність довжини шляху s від часу t) рівномірного руху виражається лінійною функцією $s(t) = kt + b$, де k і b — сталі величини.

Розглянемо два різні моменти часу t і $t + \Delta t$, де $\Delta t > 0$ — приріст часу. Довжина шляху, який матеріальна точка проходить за час Δt , позначимо через Δs — приріст довжини шляху: $\Delta s = k(t + \Delta t) + b - (kt + b) = k\Delta t$.

Знайдемо відношення $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{k\Delta t}{\Delta t} = k$.

Оскільки $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ є середньою швидкістю v_c , то для рівномірного руху $v_c = k$, тобто середня швидкість є сталою в будь-який момент часу.

Приклад 1. Точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = 2t^2 - 3t$, де $x(t)$ — положення точки в деякий момент часу (в метрах), а t — час (у секундах). Знайдіть середню швидкість у момент часу $t = 6$ секунд після початку руху. Відстань вимірюється в метрах.



IV. Миттєва швидкість руху тіла

Означення. Швидкість тіла в момент часу t називається **миттєвою швидкістю** руху тіла.

За відомою залежністю $x(t)$ визначимо миттєву швидкість руху тіла. Якщо відома середня швидкість руху тіла за проміжок часу $[t_0; t_0 + \Delta t]$, то при $\Delta t \rightarrow 0$, середня швидкість руху тіла практично не відрізняється від миттєвої швидкості в деякий момент часу t .

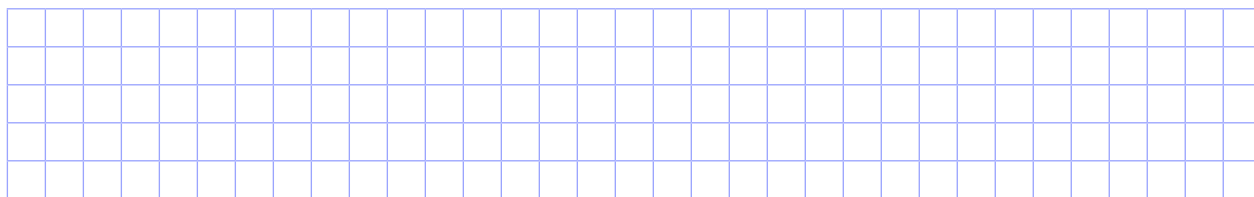
$$\text{Тому, якщо } \Delta t \rightarrow 0, \text{ то } v(t_0) = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}.$$

Отже, миттєва швидкість руху тіла є відношенням приросту функції, яка задає переміщення руху тіла, до приросту часу.

Миттєва швидкість руху тіла може набувати додатних, від'ємних значень і значення 0. Якщо швидкість на проміжку часу (t_1, t_2) додатна, то тіло рухається в додатному напрямі, якщо швидкість на проміжку часу (t_1, t_2) від'ємна, то тіло рухається у від'ємному напрямі.

Якщо границя різнищового відношення приросту шляху до приросту часу за певного значення t не існує, то кажуть, що рухома точка в цей момент часу швидкості немає.

Приклад 2. Точка рухається за законом $s(t) = t^5 + 24t^2 - 2t + 10$. Знайдіть миттєву швидкість руху точки через $t_0 = 2$ с після початку руху.



V. Прискорення руху тіла

Означення. Швидкість зміни швидкості називають **прискорення** руху тіла. Позначення: $a(t)$.

У загальному випадку матеріальна точка рухається нерівномірно, а отже, її швидкість змінюється за модулем і за напрямом. Такий рух називають змінним і характеризують прискоренням.

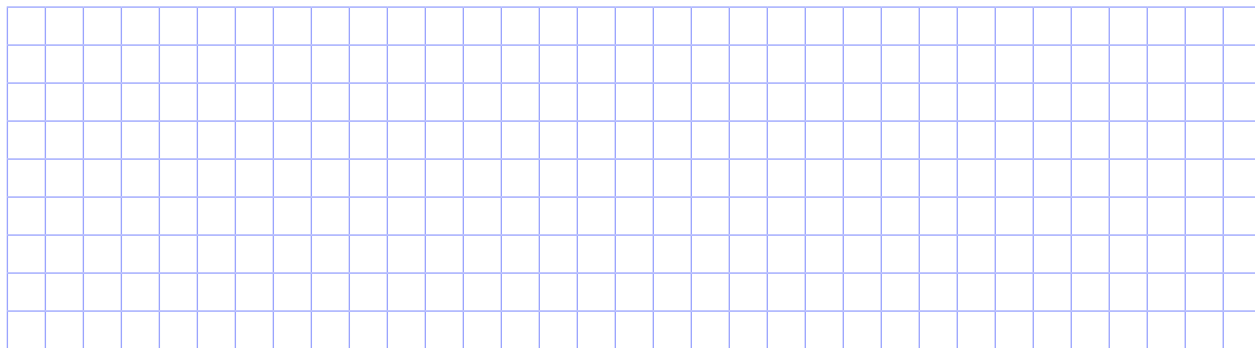
Нехай під час руху точки за траєкторією $x(t)$ протягом часу Δt її швидкість змінилася від v_1 , у точці A , до v_2 у точці B , а повна зміна швидкості $\Delta v = v_2 - v_1$.

Середнім прискоренням за проміжок часу Δt називають відношення зміни вектора швидкості до проміжку часу $a(t) = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

Тоді миттєве прискорення (або прискорення) визначається границею, до якої прямує середнє прискорення якщо $\Delta t \rightarrow 0$.

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t}.$$

Приклад 3. Матеріальна точка рухається за законом $x(t) = 2t^2 - 3t + 1$. Знайдіть прискорення руху точки в момент часу $t = 5$ с. Відстань вимірюється в метрах.



VI. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Кур'єр служби доставки везе піцу з піцерії до замовника в годину пік. Дорога ускладнена складним трафіком руху. Якщо кур'єр доставить піцу пізніше, ніж через 45 хвилин, то вона буде для замовника безкоштовною, а сам кур'єр втратить свій заробіток за доставку. Диспетчер служби доставки відстежує маршрут і повідомляє, що шлях кур'єра можна описати функцією $s(t) = 2t^2 + 3t$, де $s(t)$ — пройдений шлях (у метрах) за момент часу t , t — час (у хвилинах).

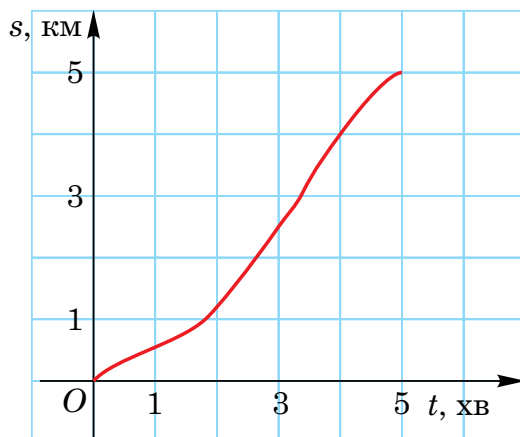
1. Знайдіть середню швидкість кур'єра за весь маршрут.
2. Обчисліть миттєву швидкість руху в момент доставки (на 45-тій хвилині).
3. Порівняйте середню та миттєву швидкості.
4. Знайдіть приріст шляху та приріст часу між 39,9 і 40 хвилинами. Обчисліть їхнє відношення, як наближене значення миттєвої швидкості.
5. Чому диспетчер служби доставки орієнтується саме на миттєву швидкість руху, а не лише на середню? Наведіть приклад.

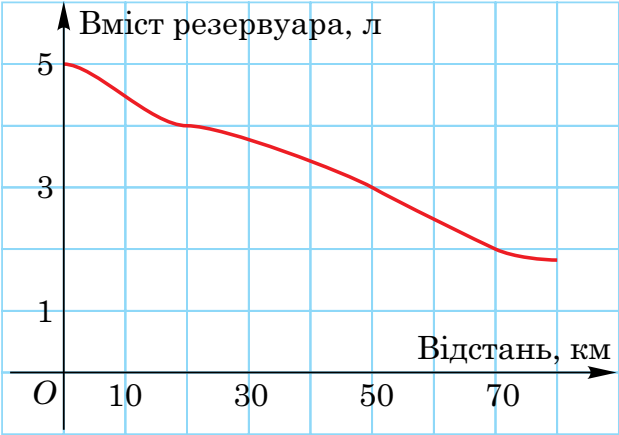
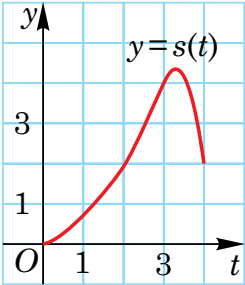
Знайдені швидкості запишіть у кілометрах за годину.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Матеріальна точка рухається за законом $s(t) = 4t^2$. Визначте миттєву швидкість руху матеріальної точки в моменти часу $t_0 = 1$ с та $t_1 = 5$ с. Відстань вимірюється в метрах.
2. Дано графік залежності часу руху автомобіля (див. рисунок) від відстані під час подорожі. Обмеження швидкості на певній ділянці дороги становить 50 км/год. Через три кілометри після початку руху автомобіль проїжджає радар, який визначає чи швидкість транспорту не перевищує норми. Визначіть, чи буде автомобіль зафіксовано на радарі.



- 3.** Відстань, яку подолав автомобіль s (у метрах) за час t (у секундах), визначається рівнянням $s(t) = 20t - t^2$ при $t \in [0; 10]$.
1. Обчисліть відстані, які проїхав автомобіль через п'ять секунд та через вісім секунд від початку руху.
 2. Знайдіть коефіцієнт дотичної до графіка функції $s(t)$ у точках $t_1 = 6$ с і $t_2 = 10$ с. Зробіть висновки з отриманих результатів.
- 4.** Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $s(t) = 2t^2 + 3$, переміщення вимірюють в метрах, а час — у секундах. Знайдіть миттєву швидкість матеріальної точки в момент $t_0 = 2$ с.
- 5.** Тіло рухається прямолінійно за законом $x(t) = t^3$, де t — час (в секундах). Переміщення вимірюється в метрах. Знайдіть швидкість тіла в момент часу:
- 1) $t = 2$ с;
 - 2) $t = 3$ с.
- 6.** Графік показує вміст пального в баку мотоцикла впродовж його руху.
- 1) Якою була витрата палива, коли було подолано 40 км? 70 км?
 - 2) На яких ділянках шляху витрата палива була найбільшою, а на яких — найменшою?
- 
- 7.** Закон руху точки задано графіком залежності шляху s від часу t .
- 1) Знайдіть середню швидкість точки з моменту $t = 2$ до $t = 3$.
 - 2) Порівняйте швидкості точки в момент часу $t_1 = 2$ і $t_2 = 3$.
 - 3) Чи змінювала точка напрям руху? Якщо змінювала, то в який момент часу?.
- 
- 8.** Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = t^3 - 4t^2$. Знайдіть швидкість і прискорення в момент $t = 5$ с. Переміщення вимірюється в метрах.
- 9.** За допомогою рівнянь швидкості $v(t)$ знайдіть:
- початкову швидкість;
 - прискорення;
 - миттєву швидкість в момент часу $t = 2$ с;
 - охарактеризуйте рух (рівноприскорений чи рівносповільнений, вздовж чи проти осі);
 - побудуйте схему руху.
- 1) $v(t) = 3 + 2t$;
 - 2) $v(t) = -5 + 3t$;
 - 3) $v(t) = 0,2t$;
 - 4) $v(t) = 10 - 4t$;
 - 5) $v(t) = -4$;
 - 6) $v(t) = -1,5 - 0,4t$.
- 10.** За допомогою наведених нижче рівнянь руху $x(t)$ знайдіть:
- початкову швидкість та початкову координату;
 - прискорення;
 - миттєву координату в момент часу $t = 4$ с;

— шлях пройдений тілом за 2 с;

— охарактеризуйте рух (рівноприскорений чи рівносповільнений)

1) $x(t) = 300 + 10t - \frac{3t^2}{2}$;

2) $x(t) = 3t + \frac{4t^2}{2}$;

3) $x(t) = 10 - 2t + 0,3t^2$;

4) $x(t) = -600 + 4t - 5t^2$.

Рівень В

1. Велосипедист проїхав 18 км між 11:30 та 11:50 із середньою швидкістю 18 км/год. Об 11:50 ранку лічильник пройденої відстані показував 10 142 км.
 - 1) Яким був показник лічильника пройденої відстані в 11:30?
 - 2) Яке припущення можна зробити щодо показника лічильника в 11:40?
2. Тіло рухається прямолінійно за законом $x(t) = t^2$. Знайдіть швидкість тіла в момент часу:
 - 1) $t = 4$ с;
 - 2) $t = 10$ с.
3. Закон руху точки по прямій задається формулою $x = x(t)$, де x — координата точки в момент часу t . Знайдіть середню швидкість руху точки на відрізку $[2; 4]$ якщо:
 - 1) $x(t) = 3t + 4$;
 - 2) $x(t) = -2t + 1$;
 - 3) $x(t) = 5t - 7$;
 - 4) $x(t) = -3t - 2$.
4. Обчисліть миттєву швидкість тіла, яке рухається за законом $s = s(t)$, у момент часу t , якщо:
 - 1) $s(t) = \sqrt{t}$, $t = 4$;
 - 2) $s(t) = t^4$, $t = 3$.
5. Точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = -\frac{t^3}{6} + 3t^2 - 5$, де x — координата (у метрах), t — час (у секундах). Знайдіть:
 - 1) момент часу t , коли прискорення точки дорівнює 0;
 - 2) швидкість руху точки в момент часу, коли прискорення дорівнює 0.
6. Точка рухається за законом $s(t) = 5t + \frac{9t^2}{2}$, де $s(t)$ — шлях (у метрах), t — час (у секундах). Знайдіть миттєву швидкість руху:
 - 1) у початковий момент руху;
 - 2) у момент $t = 4$ с.
7. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = t^3$, де t — час (в секундах), x — координата (у метрах). У який момент часу t ($t > 0$) швидкість точки становитиме 48 м/с?
8. Одна з матеріальних точок рухається прямолінійно за законом $x(t) = t^2$, а інша — за законом $x(t) = t^3$, де t — час (в секундах), x — координата (у метрах). У який момент часу t ($t > 0$) швидкості точок будуть однаковими?
9. Електричний заряд, який проходить через поперечний переріз провідника, змінюється за законом $q(t) = 3t^3 + 2t$. Знайдіть закон зміни сили струму в момент часу 2 с.

- 10.** Два гоночних автомобілі приймають участь у перегонах і рухаються прямолінійно. В деякий момент часу обидва автомобілі знаходились на однаковій відстані 150 м від фінішу. У цей момент швидкість першого автомобіля складала $v_1 = 10$ м/с, а прискорення $a_1 = 4$ м/с², швидкість другого — $v_2 = 25$ м/с, а прискорення $a_2 = 2$ м/с². До фінішу обидва автомобілі рухаються з незмінним прискоренням. Побудуйте схему руху кожного автомобіля. Запишіть рівняння руху та рівняння швидкості кожного автомобіля. Який з них переможе в змаганні. На скільки раніше фінішує переможець? Який з автомобілів матиме більшу швидкість при перетині фінішної стрічки і на скільки?

Рівень С

- 1.** За означенням, знайдіть миттєву швидкість точки, що рухається прямолінійно за законом $x(t)$, в момент t_0 :
- 1) $x(t) = -t^2 + 8t$, $t_0 = 6$;
 - 2) $x(t) = 3t^3 + 2$, $t_0 = 2$;
 - 3) $x(t) = \frac{t^2}{4}$, $t_0 = 4$;
 - 4) $x(t) = 5t - 3$, $t_0 = 10$.
- 2.** Одна точка рухається прямолінійно за законом $x = 3t - 1$, а інша — за законом $x = t^2$ ($t \geq 0$).
- 1) Укажіть момент часу, коли точки мають однакову швидкість.
 - 2) Знайдіть проміжки часу, коли швидкість першої точки менша від швидкості другої.
 - 3) Зобразіть на одному рисунку графіки швидкостей обох точок.
- 3.** Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = \frac{1}{t}$. У який момент часу ($t > 0$) швидкість точки буде дорівнювати $-\frac{1}{9}$ м/с, якщо t — час (в секундах), x — координата (у метрах)?
- 4.** Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 5t$.
- 1) Доведіть формулу для обчислення швидкості руху точки в будь-який момент часу t .
 - 2) Знайдіть швидкість у момент $t = 2$ с. Переміщення вимірюється в метрах.
 - 3) Через скільки секунд після початку руху точка зупиниться?
- 5.** Точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = 2t^3 + t - 1$. Знайдіть прискорення в момент часу t . В який момент часу прискорення дорівнюватиме:
- 1) 1 м/с²;
 - 2) 2 м/с²?
- 6.** Точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = \sqrt{t}$. Доведіть, що прискорення точки пропорційне кубу швидкості.
- 7.** По прямій рухаються дві матеріальні точки за законами $x_1(t) = 4t^2 - 3$ і $x_2(t) = t^3$. В які проміжки часу швидкість першої точки більша за швидкість другої точки?
- 8.** Матеріальна точка рухається за законом $s = \frac{1}{\sqrt{t+8}}$. Знайдіть миттєву швидкість руху точки в момент часу $t = 2$ с. Переміщення s вимірюється в метрах.

9. З пункту O по двом прямим, кут між якими 60° , рухаються два тіла: перше рівномірно зі швидкістю 5 км/год, друге — за законом $s(t) = 2t^2 + t$. З якою швидкістю вони віддаляються одне від одного? (s вимірюється в кілометрах, t — в секундах).
10. Відомо, що для будь-якої точки C стержня AB завдовжки 20 см, яка розташована від точки A на відстані l , маса стержня AC у грамах визначається $m(l) = 3l^2 + 5l$. Знайдіть лінійну густину стержнів:
 — у середині стержня AB ;
 — в точці B стержня.

Рефлексія

Запропонуйте учням оцінити розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Жахливі									Чудові

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

- 1)
-
-
- 2)
-
-
- ?
-
-

Можливі теми проєктів

1. Миттєва швидкість у логістиці.
2. Миттєва швидкість під час вільного падіння тіл.
3. Миттєва швидкість у природі.
4. Миттєва величина струму.
5. Задача про густину неоднорідного стержня.

