

Урок 5. Урок–практикум. Розв’язування задач. Застосування приросту функції

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім’я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) пригадаєте, що таке приріст функції та приріст аргументу в деякій точці;
- 2) покращите вміння обчислювати прирости функції за допомогою формул у заданих точках;
- 3) зрозумієте, як за допомогою границі відношення приросту функції до приросту аргументу знаходити миттєву швидкість руху;
- 4) дослідите зв’язок між середньою та миттєвою швидкостями руху;
- 5) навчитесь застосовувати отримані знання для розв’язання практичних задач.

II. Повторення

1. Обчисліть: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x-2}-1}$.
2. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної, яку проведено до графіка функції $y = 5x^2 - 3x + 2$ в точці з абсцисою $x_0 = 2$.
3. Обчисліть тангенс кута нахилу дотичної до графіка функції $f(x) = x - \frac{1}{3x^2}$ в точці з абсцисою $x_0 = \frac{1}{3}$.
4. Обчисліть абсцису точки графіка функції $y = 2x^2 - 3x + 1$, у якій дотична до цього графіка має кутовий коефіцієнт 3.
5. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = t^2 + t + 4$, де s – відстань (у м), t – час (у с). Знайдіть швидкість тіла через 3 с після початку руху.

III. Знаходження миттєвої швидкості руху тіла

Розглянемо загальний випадок знаходження миттєвої швидкості руху тіла. Нехай матеріальна точка рухається прямолінійно, а закон руху її задано деякою функцією $s = x(t)$.

Треба знайти швидкість точки у момент часу t . Швидкість v точки, яка рухається за законом $s = x(t)$, у момент часу t визначається співвідношенням $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_c$. Підставивши

значення $v_c = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, дістанемо формулу $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Знайдемо приріст шляху Δs . Для цього часу t надамо приросту Δt . Тоді отримаємо вираз для приросту шляху $\Delta s = x(t + \Delta t) - x(t)$. Підставивши значення Δs , остаточно ма-

тимемо таку формулу: $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$.

Приклад 1. Нехай точка рухається рівноприскорено з прискоренням a і початковою швидкістю v_0 . Знайдіть її швидкість у момент часу t .

Розв'язання. Відомо, що залежність шляху від часу в рівноприскореному русі ви-

ражається формулою $s(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}$.

1) Надамо t приріст Δt .

2) Знайдемо приріст шляху $\Delta s = v_0(t + \Delta t) + \frac{a(t + \Delta t)^2}{2} - \left(v_0 t + \frac{at^2}{2} \right)$.

Спростивши вираз у правій частині, отримаємо:

$$\Delta s = v_0 \Delta t + at \Delta t + \frac{a \Delta t^2}{2} = \Delta t \left(v_0 + at + \frac{a \Delta t}{2} \right).$$

3) Знайдемо середню швидкість як відношення приросту функції s до приросту

аргументу t : $v_c = \frac{\Delta s}{\Delta t} = v_0 + at + \frac{a \Delta t}{2}$.

4) Перейдемо в останній рівності до границі, коли $\Delta t \rightarrow 0$.

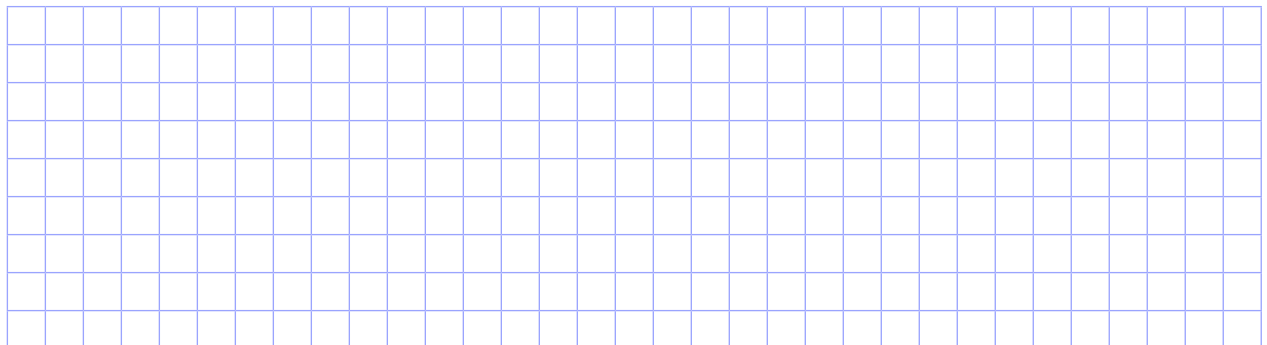
Знаходимо, що $v = v_0 + at$, тобто отримали відому з курсу фізики формулу.

Відповідь. $v = v_0 + at$.

Приклад 2. Нехай точка рухається так, що закон її руху виражається формулою $s(t) = t^3 - 5t^2 + t + 2$. Визначіть:

— середню швидкість точки за інтервал часу від $t_1 = 5$ с до $t_2 = 10$ с;

— швидкість точки на початку і в кінці цього інтервалу.

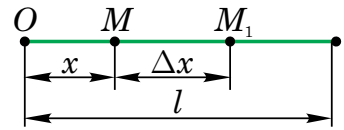


IV. Розв'язування прикладних задач на застосування приросту функції

1. Задача про густину неоднорідного стержня

Нехай дано деякий неоднорідний стержень завдовжки l . Матеріальне тіло називають неоднорідним, якщо його густина не є сталою, а змінюється від точки до точки.

Візьмемо на стержні довільну точку M , відстань якої від точки O дорівнює x (див. рисунок). Нехай маса m частини відрізка OM відома і є деякою функцією $m(x)$.



$$M = m(x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

Знайдемо густину стержня в будь-якій точці M . Як у задачі про миттєву швидкість, крім точки M розглянемо деяку точку M_1 , відстань якої від точки O позначимо через $x + \Delta x$, де Δx — приріст x .

Нехай $\Delta m = m(x + \Delta x) - m(x)$ — маса відрізка MM_1 , а Δm — приріст маси. Тоді величину $\frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{m(x + \Delta x) - m(x)}{\Delta x}$ називають середньою лінійною густиною стержня на проміжку Δx і позначають ρ_c : $\rho_c = \frac{\Delta m}{\Delta x}$.

Границю середньої густини на проміжку Δx $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \rho_c = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta x}$ називають лінійною густиною стержня в певній точці.

Отже, якщо густину стержня в цій точці позначити ρ , то, за означенням, матимемо $\rho = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta x}$.

Підставивши значення Δm , дістанемо формулу для обчислення густини стержня в певній точці: $\rho = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{m(x + \Delta x) - m(x)}{\Delta x}$.

2. Задача про величину сили змінного струму, який проходить по провіднику

Нехай по провіднику за час t через поперечний переріз проходить кількість електрики q , яка з часом змінюється, і ця зміна здається функцією $q = q(t)$.

Потрібно знайти силу струму, який проходить через провідник, у момент часу t .

Для розв'язання цієї задачі застосуємо той самий спосіб, що й для розв'язання двох попередніх. Розглянемо крім моменту часу t момент часу $t + \Delta t$, де $\Delta t > 0$ — приріст часу. Знайдемо приріст кількості електрики $\Delta q = q(t + \Delta t) - q(t)$.

Відношення $\frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t}$ називають середньою силою струму за проміжок часу Δt і позначають I_c : $I_c = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t}$.

Означення. Границю середньої сили струму за проміжок часу Δt $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} I_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}$ називають **силою струму** в заданий момент часу.

маємо формулу $I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} I_c$ або $I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t}$.

Приклад 3. Обчисліть густину лінійного стержня в точці, яка знаходиться від початку стержня на відстані $x = 15$ см, якщо відомо, що маса m змінного стержня OM $m = x^4$.

[illegible]

Приклад 4. Нехай у момент часу t через поперечний переріз провідника проходить кількість електрики $q = \sqrt{2+t}$. Знайдіть силу струму в момент $t = 2$ с.

[illegible]

V. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Самокерований робот-експедитор рухається по прямій доріжці всередині великого складу. Його бортовий комп'ютер виконує оптимізовану програму, щоб економити заряд батареї та водночас забезпечувати безпечний рух. Положення робота (у метрах) у момент часу t секунд описується формулою:

$$s(t) = \begin{cases} 2t^3 - 9t^2 + 12t, & 0 \leq t \leq 3, \\ -3t^2 + 24t - 27, & t > 3. \end{cases}$$

Робот не повинен перевищувати швидкість 10 м/с, інакше автоматично спрацює аварійне гальмування. Якщо робот рухається назад довше однієї секунди безперервно, система реєструє критичну помилку. Робот повинен повністю зупинятися хоча б раз кожні 5 секунд для сканування перешкод. Датчики фіксують миттєву швидкість у реальному часі для перевірки відповідності правилам.

- 1) Яку швидкість покаже датчик у моменти часу $t_1 = 2$ с та $t_2 = 5$ с?
- 2) Визначте всі моменти часу $t > 0$, коли робот зупиняється.
- 3) Перевірте, чи є швидкість неперервною при $t = 3$ с.
- 4) Перевірте, чи рухається робот назад довше однієї секунди безперервно.
- 5) Знайдіть момент часу t , при якому швидкість перевищує 10 м/с.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Знайдіть приріст функції на заданому проміжку:
1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, $[1; 1 + h]$; 2) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$, $[2; 2, 2]$;
3) $f(x) = x\sqrt{x}$, $[4; 4, 1]$; 4) $f(x) = |x - 2|$, $[1, 5; 2, 5]$;
5) $f(x) = x^2 \cdot \sin x$, $[0; 0, 1]$; 6) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $[8; 8, 2]$.
2. Тіло рухається за законом $s(t)$. Знайдіть середню швидкість на вказаному проміжку:
1) $s(t) = 3t^2 - 2t + 1$, $[1; 2]$; 2) $s(t) = t^3 - 3t^2 + 2t$, $[0; 1]$;
3) $s(t) = t^2(3 - t)$, $[1; 2]$; 4) $s(t) = 5 \sin t$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Тіло рухається за законом $s(t)$. Знайдіть миттєву швидкість у момент часу t_0 :
1) $s(t) = 4t^2 - 3t + 2$, $t_0 = 2$; 2) $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, $t_0 = 1$;
3) $s(t) = \sqrt{t}$, $t_0 = 9$; 4) $s(t) = t^{\frac{3}{2}}$, $t_0 = 9$.
4. Знайдіть прискорення у момент часу t_0 :
1) $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, $t_0 = 2$; 2) $s(t) = t^4 - 4t^3 + 6t^2$, $t_0 = 1$;
3) $s(t) = 5t + 2$, $t_0 = \sqrt{2}$; 4) $s(t) = 2\sqrt{t} - 4$, $t_0 = 4$.
5. Знайдіть швидкість зміни функції у точці x :
1) $y = 9,5x - 3$; 2) $y = 6x - 13$; 3) $y = -8x + 4$; 4) $y = -9x - 4$.
6. Знайдіть момент часу t_0 за заданою миттєвою швидкістю:
1) $s(t) = 3t^2 - 2t + 1$, $v_m = 10$ м/с; 2) $s(t) = t^3 - 3t^2 + 2t$, $v_m = 0$ м/с;
3) $s(t) = t^2 + \cos t$, $v_m = 3$ м/с; 4) $s(t) = \sqrt{t}$, $v_m = 0,1$ м/с.
7. Знайдіть середню густину стержня, якщо густина стержня змінюється на заданому проміжку за законом:
1) $\rho(x) = 5 + 0,2x$, $[0; 10]$; 2) $\rho(x) = 10 - 0,5x$, $[0; 6]$;
3) $\rho(x) = 2 + x^2$, $[0; 2]$; 4) $\rho(x) = 5 + 2 \sin x$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
8. Знайдіть силу струму в момент часу t :
1) $I(t) = 2t + 3$, $t = 5$; 2) $I(t) = -4t + 10$, $t = 2$;
3) $I(t) = t^2 + 2t$, $t = 3$; 4) $I(t) = -t^2 + 5t$, $t = 3$.

Рівень В

1. Тіло рухається за законом $s(t)$. Знайдіть середню швидкість на вказаному проміжку:
1) $s(t) = \frac{t^2}{t + 1}$, $[1; 2]$; 2) $s(t) = |t - 3|$, $[1; 5]$;
3) $s(t) = t \cdot \sqrt{t}$, $[1; 4]$; 4) $s(t) = t^{\frac{3}{2}}$, $[4; 9]$.

- 2.** Тіло рухається за законом $s(t)$. Знайдіть миттєву швидкість у момент часу t_0 :
- 1) $s(t) = \frac{t+3}{3}, t_0 = 2$;
 - 2) $s(t) = 5 \cos t, t_0 = \frac{\pi}{2}$;
 - 3) $s(t) = t^2 \sin t, t_0 = 0$;
 - 4) $s(t) = 2 \cdot t^{\frac{2}{3}}, t_0 = 8$.
- 3.** Знайдіть прискорення в момент часу t_0 :
- 1) $s(t) = \operatorname{tg} t, t_0 = \frac{\pi}{4}$;
 - 2) $s(t) = \cos^2 t, t_0 = 0$;
 - 3) $s(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, t_0 = 3$;
 - 4) $s(t) = \sqrt{t+1} - \sqrt{t}, t_0 = 4$.
- 4.** Знайдіть момент часу, при якому миттєва швидкість дорівнює 0:
- 1) $y = x^4 - 10x^2 + 9$;
 - 2) $y = 2|x| - x^2$;
 - 3) $y = \sin(2x) + 2\sin x$;
 - 4) $y = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 1}$.
- 5.** Знайдіть середню густину стержня, якщо густина стержня змінюється на заданому проміжку за законом:
- 1) $\rho(x) = 4 + \sqrt{x}, [0; 9]$;
 - 2) $\rho(x) = 3 + x \cdot \cos x, [0; \pi]$;
 - 3) $\rho(x) = 7 + 2x^2 \sin x, [0; 2]$;
 - 4) $\rho(x) = 5 + |x - 1|, [0; 2]$.
- 6.** Запишіть загальну формулу сили струму в момент часу t :
- 1) $I(t) = 5t^2 - 3t + 2$;
 - 2) $I(t) = 4 \sin(2t) + t$;
 - 3) $I(t) = 3t^3 - 2t^2 + t$;
 - 4) $I(t) = 6 \cos t + 2t$.
- 7.** Знайдіть значення a , при якому прискорення дорівнює 0:
- 1) $x(t) = t^3 - 3t^3 + at$;
 - 2) $x(t) = 2t^3 + at^2 + 5$;
 - 3) $x(t) = at^2 + 2t + 3$;
 - 4) $x(t) = t^4 - 2at^2$.
- 8.** Поїзд гальмує рівноприскорено з прискоренням $a = -0,8 \text{ м/с}^2$. Скільки часу він буде гальмувати, якщо його початкова швидкість 72 км/год, а кінцева — 0 м/с?

Рівень С

- 1.** Ракету було запущено вертикально вгору зі швидкістю 360 км /год. Якою буде швидкість ракети через 5 секунд? До якої висоти долетить ракета?
- 2.** Тіло масою $m = 2$ кг рухається прямолінійно за законом $s = 1 + t^2$. Обчисліть кінетичну енергію тіла через 3 секунди після початку руху.
- 3.** Точка рухається по параболі $y = 8x - x^2$, причому її абсциса змінюється за законом $x = \sqrt{t}$. Знайдіть швидкість зміни ординати точки в момент $t = 4$ с.
- 4.** Абсциса x точки, яка рухається по гіперболі $y = \frac{4}{x}$ росте рівномірно зі швидкістю 2 одиниці за секунду. Знайдіть швидкість зміни ординати, коли точка проходить положення $(5; 2)$.
- 5.** У якій точці компоненти швидкості руху точки v_x та v_y , траєкторією якої є $y = 2x^2 - 4$, відносяться, як 2 : 1?
- 6.** Траєкторія руху точки задана співвідношення $16x^2 + 9y^2 = 400$. У якій точці компоненти швидкості мають однакові величини, але протилежного знака?

7. Два вали обертаються так, що кут повороту першого задається формулою $\alpha_1 = \frac{t^3}{2} + 15t^2 - 4$ (у радіанах і секундах), а другого $\alpha_2 = 0,25t^2$ (у градусах і хвилинах). Який вал обертається швидше наприкінці першої хвилини?
8. Радіус кулі зростає рівномірно зі швидкістю 5 см/с. Обчисліть швидкість зміни об'єму та поверхні кулі в момент, коли його радіус дорівнює 50 см.

Рефлексія

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
- 4) Найскладнішим для мене було
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
- 6) Найбільше мені сподобалося

Можливі теми проєктів

1. Моделювання зміни популяції тварин або бактерій за допомогою функцій та дослідження приростів.
2. Вивчення миттєвих змін температури у різних середовищах і застосування приростів функції для їхнього опису.
3. Використання граничного значення приросту функції до приросту аргумента у задачах фізики.







