

Урок 5. Урок–практикум. Розв’язування задач. Застосування приросту функції

Тип уроку: застосування знань, умінь і навичок.

План уроку

1. Обчислення приростів функцій у деяких точках.
2. Знаходження миттєвої швидкості руху тіла.
3. Розв’язування прикладних задач на застосування приросту функції.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

виокремлює в конкретній специфічній проблемній ситуації її складові частини, які можуть бути розв’язані математичними методами [12 МАО 1.1.1–2 П];

оцінює достовірність і доцільність використання даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.2–1 П];

використовує різні форми подання математичних об’єктів відповідно до специфіки проблемної ситуації [12 МАО 4.2.2–2 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Перед початком вивчення теми запропонуйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Заохочуйте учнів/учениць наводити власні приклади із життя.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям розв’язати кілька прикладів на повторення на власний розсуд.
- 3) Сформулюйте (без розв’язання) практичну задачу. Запропонуйте учням/ученицям розв’язати її наприкінці уроку.
- 4) Теорію подавайте стисло. Зразки можливого подання теорії наводяться.
- 5) До кожного теоретичного твердження наведено ілюстративні приклади. Обирайте їх на власний розсуд.
- 6) Обирайте кількість та зміст матеріалу на ваш розсуд.

7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С.

9) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Інженер тестує, як змінюється рівень заряду батареї за час заряджання. Йому потрібно знати приріст заряду у перші хвилини, щоб оптимізувати швидку зарядку. Чому приріст функції важливий для швидкої зарядки батареї?

2) Інженер-конструктор працює над проєктом мосту. Для зменшення ваги конструкції та економії матеріалу вирішено використати балку зі змінною густиною — наприклад, порожнистий профіль, що поступово стає тоншим або має вставки з різних матеріалів. Як точно розрахувати масу балки та місця найбільших навантажень?

3) Інженер електромереж обслуговує високовольтну лінію, по якій проходить змінний струм, що змінюється за законом синусоїди. Від точності розрахунків залежить робота реле автоматичного захисту та запобігання аваріям. Якщо струм різко збільшується, реле повинно спрацювати миттєво — інакше можливий перегрів кабелів. Як передбачити пікові навантаження для правильного налаштування реле захисту?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Обчисліть: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x-2}-1}$.

Відповідь. 2.

2. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної, яку проведено до графіка функції $y = 5x^2 - 3x + 2$ в точці з абсцисою $x_0 = 2$.

Відповідь. 17.

3. Обчисліть тангенс кута нахилу дотичної до графіка функції $f(x) = x - \frac{1}{3x^2}$ в точці з абсцисою $x_0 = \frac{1}{3}$.

Відповідь. 19.

4. Обчисліть абсцису точки графіка функції $y = 2x^2 - 3x + 1$, у якій дотична до цього графіка має кутовий коефіцієнт 3.

Відповідь. 1,5.

5. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = t^2 + t + 4$, де s – відстань (у м), t – час (у с). Знайдіть швидкість тіла через 3 с після початку руху.
Відповідь. 7 м/с.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Самокерований робот-експедитор рухається по прямій доріжці всередині великого складу. Його бортовий комп'ютер виконує оптимізовану програму, щоб економити заряд батареї та водночас забезпечувати безпечний рух. Положення робота (у метрах) у момент часу t секунд описується формулою:

$$s(t) = \begin{cases} 2t^3 - 9t^2 + 12t, & 0 \leq t \leq 3, \\ -3t^2 + 24t - 27, & t > 3. \end{cases}$$

Робот не повинен перевищувати швидкість 10 м/с, інакше автоматично спрацює аварійне гальмування. Якщо робот рухається назад довше однієї секунди безперервно, система реєструє критичну помилку. Робот повинен повністю зупинятися хоча б раз кожні 5 секунд для сканування перешкод. Датчики фіксують миттєву швидкість у реальному часі для перевірки відповідності правилам.

- 1) Яку швидкість покаже датчик у моменти часу $t_1 = 2$ с та $t_2 = 5$ с?
- 2) Визначте всі моменти часу $t > 0$, коли робот зупиняється.
- 3) Перевірте, чи є швидкість неперервною при $t = 3$ с.
- 4) Перевірте, чи рухається робот назад довше однієї секунди безперервно.
- 5) Знайдіть момент часу t , при якому швидкість перевищує 10 м/с.

III. Знаходження миттєвої швидкості руху тіла

Розглянемо загальний випадок знаходження миттєвої швидкості руху тіла. Нехай матеріальна точка рухається прямолінійно, а закон руху її задано деякою функцією $s = x(t)$.

Треба знайти швидкість точки у момент часу t . Швидкість v точки, яка рухається за законом $s = x(t)$, у момент часу t визначається співвідношенням $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_c$. Підставивши

значення $v_c = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, дістанемо формулу $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Знайдемо приріст шляху Δs . Для цього часу t надамо приросту Δt . Тоді отримаємо вираз для приросту шляху $\Delta s = x(t + \Delta t) - x(t)$. Підставивши значення Δs , остаточно матимемо таку формулу: $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$.

Ілюстративні приклади

6. Нехай точка рухається рівноприскорено з прискоренням a і початковою швидкістю v_0 . Знайдіть її швидкість у момент часу t .

Розв'язання. Відомо, що залежність шляху від часу в рівноприскореному русі виражається формулою $s(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}$.

- 1) Надамо t приріст Δt .

$$2) \text{ Знайдемо приріст шляху } \Delta s = v_0(t + \Delta t) + \frac{a(t + \Delta t)^2}{2} - \left(v_0 t + \frac{a t^2}{2} \right).$$

Спростивши вираз у правій частині, отримаємо:

$$\Delta s = v_0 \Delta t + a t \Delta t + \frac{a \Delta t^2}{2} = \Delta t \left(v_0 + a t + \frac{a \Delta t}{2} \right).$$

3) Знайдемо середню швидкість як відношення приросту функції s до приросту

$$\text{аргументу } t: v_c = \frac{\Delta s}{\Delta t} = v_0 + a t + \frac{a \Delta t}{2}.$$

4) Перейдемо в останній рівності до границі, коли $\Delta t \rightarrow 0$.

Знаходимо, що $v = v_0 + a t$, тобто отримали відому з курсу фізики формулу.

Відповідь. $v = v_0 + a t$.

7. Нехай точка рухається так, що закон її руху виражається формулою $s(t) = t^3 - 5t^2 + t + 2$. Визначіть:

— середню швидкість точки за інтервал часу від $t_1 = 5$ с до $t_2 = 10$ с;

— швидкість точки на початку і в кінці цього інтервалу.

Розв'язання. Надамо аргументу t приросту Δt і знайдемо приріст шляху Δs . Для цього розглянемо два моменти часу t і $t + \Delta t$. Тоді

$$\Delta s = (t + \Delta t)^3 - 5(t + \Delta t)^2 + (t + \Delta t) + 2 - (t^3 - 5t^2 + t + 2),$$

$$\Delta s = 3t(\Delta t)^2 + 3t^2\Delta t + (\Delta t)^3 - 10t\Delta t - 5(\Delta t)^2 + \Delta t.$$

Обчислимо середню швидкість за інтервал часу Δt .

$$v_c = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 3t\Delta t + 3t^2 + (\Delta t)^2 - 10t - 5\Delta t + 1.$$

Підставивши сюди значення $t = t_1$, $\Delta t = t_2 - t_1$, знаходимо середню швидкість за інтервал часу від $t_1 = 5$ с до $t_2 = 10$ с, тобто $v_c = 101$ м/с.

Знайдемо швидкість у будь-який момент часу t , щоразу отримуючи відповідні значення швидкості. Зокрема, підставивши значення $t_1 = 5$ с та $t_2 = 10$ с, знаходимо, що $v = 26$ м/с, $v = 201$ м/с.

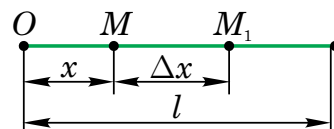
Відповідь. 101 м/с; 26 м/с; 201 м/с.

IV. Розв'язування прикладних задач на застосування приросту функції

1. Задача про густину неоднорідного стержня

Нехай дано деякий неоднорідний стержень завдовжки l . Матеріальне тіло називають неоднорідним, якщо його густина не є сталою, а змінюється від точки до точки.

Візьмемо на стержні довільну точку M , відстань якої від точки O дорівнює x (див. рисунок). Нехай маса m частини відрізка OM відома і є деякою функцією $m(x)$.



$$M = m(x), 0 \leq x \leq l.$$

Знайдемо густину стержня в будь-якій точці M . Як у задачі про миттєву швидкість, крім точки M розглянемо деяку точку M_1 , відстань якої від точки O позначимо через $x + \Delta x$, де Δx — приріст x .

Нехай $\Delta m = m(x + \Delta x) - m(x)$ — маса відрізка MM_1 , а Δm — приріст маси. Тоді величину $\frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{m(x + \Delta x) - m(x)}{\Delta x}$ називають середньою лінійною густиною стержня на проміжку Δx і позначають ρ_c : $\rho_c = \frac{\Delta m}{\Delta x}$.

Границю середньої густини на проміжку Δx $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \rho_c = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta x}$ називають лінійною густиною стержня в певній точці.

Отже, якщо густину стержня в цій точці позначити ρ , то, за означенням, матимемо $\rho = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta x}$.

Підставивши значення Δm , дістанемо формулу для обчислення густини стержня в певній точці: $\rho = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{m(x + \Delta x) - m(x)}{\Delta x}$.

2. Задача про величину сили змінного струму, який проходить по провіднику

Нехай по провіднику за час t через поперечний переріз проходить кількість електрики q , яка з часом змінюється, і ця зміна здається функцією $q = q(t)$.

Потрібно знайти силу струму, який проходить через провідник, у момент часу t .

Для розв'язання цієї задачі застосуємо той самий спосіб, що й для розв'язання двох попередніх. Розглянемо крім моменту часу t момент часу $t + \Delta t$, де $\Delta t > 0$ — приріст часу. Знайдемо приріст кількості електрики $\Delta q = q(t + \Delta t) - q(t)$.

Відношення $\frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t}$ називають середньою силою струму за проміжок часу Δt і позначають I_c : $I_c = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t}$.

Означення. Границю середньої сили струму за проміжок часу Δt $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} I_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}$ називають **силою струму** в заданий момент часу.

Отже, якщо через I позначити силу струму в момент часу t , то для її обчислення маємо формулу $I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} I_c$ або $I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t}$.

Ілюстративні приклади

- 8.** Обчисліть густину лінійного стержня в точці, яка знаходиться від початку стержня на відстані $x = 15$ см, якщо відомо, що маса m змінного стержня OM $m = x^4$.

Розв'язання. Знайдемо середню густину стержня на проміжку Δx . Отримаємо

$$\rho_c = \frac{(x + \Delta x)^4 - x^4}{\Delta x} = 4x^3 + 6x^2\Delta x + 4x\Delta x^2 + \Delta x^3.$$

Обчисливши границю при $\Delta x \rightarrow 0$, маємо $\rho = 4x^3$.

Підставивши значення $x = 15$, знаходимо $\rho = 13\,500$ (г/см³).

Відповідь. 13 500 г/см³.

9. Нехай у момент часу t через поперечний переріз провідника проходить кількість електрики $q = \sqrt{2+t}$. Знайдіть силу струму в момент $t = 2$ с.

Розв'язання. Знайдемо середню силу струму за проміжок часу Δt :

$$I_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2+t+\Delta t} + \sqrt{2+t}} = \frac{1}{2\sqrt{2+t}}.$$

Підставимо в отриману формулу значення $t = 2$, отримаємо $I = 0,25$ (А).

Відповідь. 0,25 А.

V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (8–10 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Самокерований робот-експедитор рухається по прямій доріжці всередині великого складу. Його бортовий комп'ютер виконує оптимізовану програму, щоб економити заряд батареї та водночас забезпечувати безпечний рух. Положення робота (у метрах) у момент часу t секунд описується формулою:

$$s(t) = \begin{cases} 2t^3 - 9t^2 + 12t, & 0 \leq t \leq 3, \\ -3t^2 + 24t - 27, & t > 3. \end{cases}$$

Робот не повинен перевищувати швидкість 10 м/с, інакше автоматично спрацює аварійне гальмування. Якщо робот рухається назад довше однієї секунди безперервно, система реєструє критичну помилку. Робот повинен повністю зупинитися хоча б раз кожні 5 секунд для сканування перешкод. Датчики фіксують миттєву швидкість у реальному часі для перевірки відповідності правилам.

- 1) Яку швидкість покаже датчик у моменти часу $t_1 = 2$ с та $t_2 = 5$ с?
- 2) Визначте всі моменти часу $t > 0$, коли робот зупиняється.
- 3) Перевірте, чи є швидкість неперервною при $t = 3$ с.
- 4) Перевірте, чи рухається робот назад довше однієї секунди безперервно.
- 5) Знайдіть момент часу t , при якому швидкість перевищує 10 м/с.

Розв'язання. 1). Знайдемо миттєву швидкість руху робота в момент часу $t_1 = 2$ с. Оскільки $2 < 3$, то $s(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t$. Миттєву швидкість знайдемо за формулою

$$v_M = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \text{ Знайдемо } \Delta s:$$

$$\Delta s = 2(t + \Delta t)^3 - 9(t + \Delta t)^2 + 12(t + \Delta t) - (2t^3 - 9t^2 + 12t) = 6t^2\Delta t + 6t\Delta t^2 + 2\Delta t^3 - 18t\Delta t - 9\Delta t^2 + 12\Delta t.$$

$$\text{Тоді } v_M = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (6t^2 + 6t\Delta t + 2\Delta t^2 - 18t - 9\Delta t + 12) = 6t^2 - 18t + 12.$$

Оскільки $t_1 = 2$ с, то $v_M(2) = 6 \cdot 4 - 18 \cdot 2 + 12 = 0$ (м/с).

Отже, в момент часу $t_1 = 2$ с робот зупинився.

Знайдемо миттєву швидкість руху робота у момент часу $t_2 = 5$ с. Оскільки $5 > 3$, то $s(t) = -3t^2 + 24t - 27$.

$$\Delta s = -3(t + \Delta t)^2 + 24(t + \Delta t) - 27 - (-3t^2 + 24t - 27) = -6t\Delta t - 3\Delta t^2 + 24\Delta t.$$

$$\text{Тоді } v_M = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (-6t - 3\Delta t + 24) = -6t + 24.$$

Оскільки $t_2 = 5$ с, то $v_M(5) = -6 \cdot 5 + 24 = -6$ (м/с).

Отже, у момент часу $t_2 = 5$ с робот рухається у протилежному напрямку зі швидкістю 6 м/с.

2) Робот зупиняється в моменти часу, коли $v_m = 0$.

Якщо $t < 3$, то $v_m = 6t^2 - 18t + 12 = 0$. Звідси $t_1 = 1$ с, $t_2 = 2$ с. Отже на 1-й та на 2-й секундах робот зупиняється.

Якщо $t > 3$, то $v_m = -6t + 24 = 0$. Звідси $t_3 = 4$ с. Отже на 4-й секунді робот зупиняється.

3) Якщо $t = 3$ с, то миттєва швидкість буде обчислюватись $v_m = 6t^2 - 18t + 12$.

$$v_m(3) = 6 \cdot 9 - 18 \cdot 3 + 12 = 12 \text{ (м/с)}.$$

Отже, швидкість «стрибає», у момент $t = 3$ с є розрив за швидкістю. Потрібне згладжування траєкторії.

4) Якщо робот рухається назад, то миттєва швидкість має набувати від'ємного значення. Розв'яжемо нерівність: $6t^2 - 18t + 12 < 0$, $t \in (1; 2)$. Отже, на першій частині шляху роботу рухається назад менше однієї секунди.

Розв'яжемо нерівність для другої частини шляху $-6t + 24 < 0$, $t \in (4; +\infty)$, тобто після четвертої секунди робот починає рух назад.

5) Щоб знайти моменти часу, у які миттєва швидкість перевищує 10 м/с, розв'яжемо нерівності. $6t^2 - 18t + 12 > 10$, $t \in (0, 11; 8, 6)$.

Отже, на вказаному проміжку робот перевищує задану швидкість.

$-6t + 24 > 10$, $t > 2,3$. Тому після 2,3 секунди швидкість буде зростати.

Висновок. Інженерам необхідно внести корективи у задану траєкторію руху робота, оскільки задана траєкторія руху не задовольняє технічні вимоги. Інженерам потрібно:

— обмежити початкове прискорення,

— уникнути стрибка швидкості при $t = 3$ с,

— перепрограмувати траєкторію, щоб уникнути руху назад.

Відповідь. 0 м/с; 6 м/с; 4 с; 12 м/с.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Знайдіть приріст функції на заданому проміжку:

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, $[1; 1 + h]$; 2) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$, $[2; 2, 2]$;

3) $f(x) = x\sqrt{x}$, $[4; 4, 1]$; 4) $f(x) = |x - 2|$, $[1, 5; 2, 5]$;

5) $f(x) = x^2 \cdot \sin x$, $[0; 0, 1]$; 6) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $[8; 8, 2]$.

2. Тіло рухається за законом $s(t)$. Знайдіть середню швидкість на вказаному проміжку:

1) $s(t) = 3t^2 - 2t + 1$, $[1; 2]$; 2) $s(t) = t^3 - 3t^2 + 2t$, $[0; 1]$;

3) $s(t) = t^2(3 - t)$, $[1; 2]$; 4) $s(t) = 5 \sin t$, $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

3. Тіло рухається за законом $s(t)$. Знайдіть миттєву швидкість у момент часу t_0 :

1) $s(t) = 4t^2 - 3t + 2$, $t_0 = 2$; 2) $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, $t_0 = 1$;

3) $s(t) = \sqrt{t}$, $t_0 = 9$; 4) $s(t) = t^{\frac{3}{2}}$, $t_0 = 9$.

4. Знайдіть прискорення у момент часу t_0 :

1) $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, $t_0 = 2$; 2) $s(t) = t^4 - 4t^3 + 6t^2$, $t_0 = 1$;

3) $s(t) = 5t + 2$, $t_0 = \sqrt{2}$; 4) $s(t) = 2\sqrt{t} - 4$, $t_0 = 4$.

- 5.** Знайдіть швидкість зміни функції у точці x :
- 1) $y = 9,5x - 3$; 2) $y = 6x - 13$; 3) $y = -8x + 4$; 4) $y = -9x - 4$.
- 6.** Знайдіть момент часу t_0 за заданою миттєвою швидкістю:
- 1) $s(t) = 3t^2 - 2t + 1$, $v_m = 10$ м/с; 2) $s(t) = t^3 - 3t^2 + 2t$, $v_m = 0$ м/с;
 3) $s(t) = t^2 + \cos t$, $v_m = 3$ м/с; 4) $s(t) = \sqrt{t}$, $v_m = 0,1$ м/с.
- 7.** Знайдіть середню густину стержня, якщо густина стержня змінюється на заданому проміжку за законом:
- 1) $\rho(x) = 5 + 0,2x$, $[0; 10]$; 2) $\rho(x) = 10 - 0,5x$, $[0; 6]$;
 3) $\rho(x) = 2 + x^2$, $[0; 2]$; 4) $\rho(x) = 5 + 2 \sin x$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
- 8.** Знайдіть силу струму в момент часу t :
- 1) $I(t) = 2t + 3$, $t = 5$; 2) $I(t) = -4t + 10$, $t = 2$;
 3) $I(t) = t^2 + 2t$, $t = 3$; 4) $I(t) = -t^2 + 5t$, $t = 3$.

Рівень В

- 1.** Тіло рухається за законом $s(t)$. Знайдіть середню швидкість на вказаному проміжку:
- 1) $s(t) = \frac{t^2}{t+1}$, $[1; 2]$; 2) $s(t) = |t - 3|$, $[1; 5]$;
 3) $s(t) = t \cdot \sqrt{t}$, $[1; 4]$; 4) $s(t) = t^{\frac{3}{2}}$, $[4; 9]$.
- 2.** Тіло рухається за законом $s(t)$. Знайдіть миттєву швидкість у момент часу t_0 :
- 1) $s(t) = \frac{t+3}{3}$, $t_0 = 2$; 2) $s(t) = 5 \cos t$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$;
 3) $s(t) = t^2 \sin t$, $t_0 = 0$; 4) $s(t) = 2 \cdot t^{\frac{2}{3}}$, $t_0 = 8$.
- 3.** Знайдіть прискорення в момент часу t_0 :
- 1) $s(t) = \operatorname{tg} t$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$; 2) $s(t) = \cos^2 t$, $t_0 = 0$;
 3) $s(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$, $t_0 = 3$; 4) $s(t) = \sqrt{t+1} - \sqrt{t}$, $t_0 = 4$.
- 4.** Знайдіть момент часу, при якому миттєва швидкість дорівнює 0:
- 1) $y = x^4 - 10x^2 + 9$; 2) $y = 2|x| - x^2$;
 3) $y = \sin(2x) + 2\sin x$; 4) $y = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 1}$.
- 5.** Знайдіть середню густину стержня, якщо густина стержня змінюється на заданому проміжку за законом:
- 1) $\rho(x) = 4 + \sqrt{x}$, $[0; 9]$; 2) $\rho(x) = 3 + x \cdot \cos x$, $[0; \pi]$;
 3) $\rho(x) = 7 + 2x^2 \sin x$, $[0; 2]$; 4) $\rho(x) = 5 + |x - 1|$, $[0; 2]$.
- 6.** Запишіть загальну формулу сили струму в момент часу t :
- 1) $I(t) = 5t^2 - 3t + 2$; 2) $I(t) = 4 \sin(2t) + t$;
 3) $I(t) = 3t^3 - 2t^2 + t$; 4) $I(t) = 6 \cos t + 2t$.
- 7.** Знайдіть значення a , при якому прискорення дорівнює 0:
- 1) $x(t) = t^3 - 3t^3 + at$; 2) $x(t) = 2t^3 + at^2 + 5$;
 3) $x(t) = at^2 + 2t + 3$; 4) $x(t) = t^4 - 2at^2$.

8. Поїзд гальмує рівноприскорено з прискоренням $a = -0,8 \text{ м/с}^2$. Скільки часу він буде гальмувати, якщо його початкова швидкість 72 км/год , а кінцева — 0 м/с ?

Рівень С

1. Ракету було запущено вертикально вгору зі швидкістю 360 км/год . Якою буде швидкість ракети через 5 секунд? До якої висоти долетить ракета?
2. Тіло масою $m = 2 \text{ кг}$ рухається прямолінійно за законом $s = 1 + t^2$. Обчисліть кінетичну енергію тіла через 3 секунди після початку руху.
3. Точка рухається по параболі $y = 8x - x^2$, причому її абсциса змінюється за законом $x = \sqrt{t}$. Знайдіть швидкість зміни ординати точки в момент $t = 4 \text{ с}$.
4. Абсциса x точки, яка рухається по гіперболі $y = \frac{4}{x}$ росте рівномірно зі швидкістю 2 одиниці за секунду. Знайдіть швидкість зміни ординати, коли точка проходить положення $(5; 2)$.
5. У якій точці компоненти швидкості руху точки v_x та v_y , траєкторією якої є $y = 2x^2 - 4$, відносяться, як $2 : 1$?
6. Траєкторія руху точки задана співвідношення $16x^2 + 9y^2 = 400$. У якій точці компоненти швидкості мають однакові величини, але протилежного знака?
7. Два вали обертаються так, що кут повороту першого задається формулою $\alpha_1 = \frac{t^3}{2} + 15t^2 - 4$ (у радіанах і секундах), а другого $\alpha_2 = 0,25t^2$ (у градусах і хвилинах). Який вал обертається швидше наприкінці першої хвилини?
8. Радіус кулі зростає рівномірно зі швидкістю 5 см/с . Обчисліть швидкість зміни об'єму та поверхні кулі в момент, коли його радіус дорівнює 50 см .

VII. Рефлексія (1–2 хв)

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
- 4) Найскладнішим для мене було
- 5) Тепер я впевнений/впевнена у своїй здатності

6) Найбільше мені сподобалося

.....

.....

Можливі теми проєктів

1. Моделювання зміни популяції тварин або бактерій за допомогою функцій та дослідження приростів.
2. Вивчення миттєвих змін температури у різних середовищах і застосування приростів функції для їхнього опису.
3. Використання граничного значення приросту функції до приросту аргумента у задачах фізики.

Список використаної літератури

- 1) Шкіль М. І., Слєпкань З. І., Дубинчук О. С. Алгебра і початки аналізу: підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів. — К. : Зодіак-ЕКО, 2007. — 384 с.
- 2) Шкіль М. І. Математичний аналіз : підручник : у 2 ч. Ч. 1. — 3-тє вид., переробл. і допов. — К. : Вища школа, 2005. — 447 с. : іл.
- 3) Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу: профільний рівень: підручник для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. — Х. : Гімназія, 2018. — 400 с. : іл.
- 4) Стрижак Т. Г., Коновалова Н. Р. Математичний аналіз: приклади і задачі: навч. посібник / Т. Г. Стрижак, Н. Р. Коновалова. — Київ: Либідь, 1995. — 240 с.