

Урок 6. Поняття похідної

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) ознайомитесь із поняттям похідної функції в точці;
- 2) навчитесь обчислювати похідну за означенням;
- 3) дізнаєтесь про геометричний зміст похідної;
- 4) з'ясуєте, що таке диференційованість функції;
- 5) розширите уявлення про фізичний зміст похідної;
- 6) навчитесь застосовувати похідну для розв'язування задач, пов'язаних із реальними життєвими ситуаціями;
- 7) аналізуватимете зміну величин у формі графіка, формули або тексту.

II. Повторення

1. Прямолінійний рух точки задано рівнянням $s = 3t^2 - 2t + 5$, де t — час (в секундах), s — переміщення (в метрах). Знайдіть швидкість руху точки в момент $t = 5$ с.
2. Знайдіть різницеве відношення приросту функції до приросту аргументу для функції $f(x)$ у вказаній точці, якщо $f(x) = x^2 + 1$, $x_0 = -1$, $\Delta x = 0,1$.
3. Для функції $f(x) = x^2 - 3x$ виразіть приріст Δf функції у точці x_0 , якщо $x_0 = 3$, $x = 2,5$.
4. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції $f(x)$, у точці $x_0 = 2$, якщо дотична утворює кут 30° з додатним напрямком осі абсцис.

III. Означення похідної

Задачі обчислення кутового коефіцієнта дотичної до графіка функції в точці з абсцисою x_0 і знаходження миттєвої швидкості руху тіла мають подібне розв'язання. У задачах знаходиться різницеве відношення приросту функції до приросту аргументу.

Постановка таких задач приводить до загальної задачі — обчислення похідної функції в заданій точці.

Схема обчислення похідної функції в точці

1. За допомогою формули, що задає функцію $f(x)$, знаходимо її приріст у точці x_0 :

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

2. Знаходимо вираз для різницевого відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

3. З'ясуємо, до якого числа прямує різницеве відношення приросту функції до приросту аргументу $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, якщо приріст аргументу Δx прямує до нуля.

Це можна записати так: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$, читається «еф штрих від x_0 ».

Знайдене таким чином число називають *швидкістю зміни функції $f(x)$ у точці x_0* або *похідною функції $f(x)$ у точці x_0* .

Означення. Похідною функції $f(x)$ у точці x_0 називається число, до якого прямує різницеве відношення приросту функції до приросту аргументу, якщо приріст аргументу прямує до нуля.

Приклад 1. Знайдіть похідну функції $f(x) = x^3$ у точці x_0 .

Розв'язання. Приріст функції: $\Delta f = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$.

Різницеве відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2, \Delta x \neq 0.$$

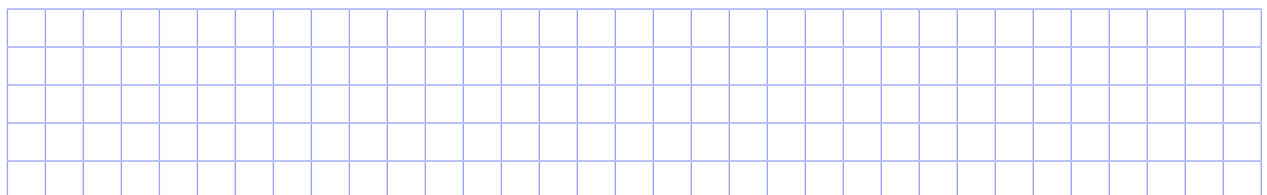
Якщо $\Delta x \rightarrow 0$, то значення виразів $3x_0\Delta x$ і $(\Delta x)^2$, також прямують до нуля.

Оскільки x_0 — задане число, то доданок $3x_0^2$ незмінний.

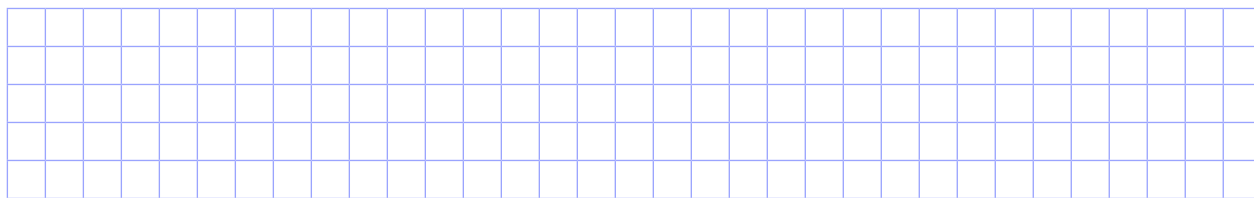
Отже, $\frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow 3x_0^2$, якщо $\Delta x \rightarrow 0$. Таким чином, $f'(x_0) = 3x_0^2$.

Відповідь. $3x_0^2$.

Приклад 2. Знайдіть похідну функції $f(x) = kx + b$, де k і b — деякі числа, в точці x_0 .



Приклад 3. Доведіть, що функція $y = |x|$ в точці $x_0 = 0$ похідної не має.



IV. Геометричний зміст похідної

Розглянемо січну NM , проведену через N і M графіка функції $f(x)$. Нехай точка N , рухаючись по графіку функції, наближається до точки M (див. рисунок). Тоді приріст аргументу прямує до 0.

Тоді графік функції $f(x)$ поблизу точки x_0 практично не відрізняється від відрізка січної, що проходить через точки $(x_0; f(x_0))$ і $(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$. Січна графіка функції, яка проходить через точки M і N , перетворюється на дотичну до графіка функції у точці x_0 (пряма BM), при $\Delta x \rightarrow 0$.

Отже, дотична до графіка функції в точці x_0 є граничним положенням січної, якщо $\Delta x \rightarrow 0$. Оскільки кутовий

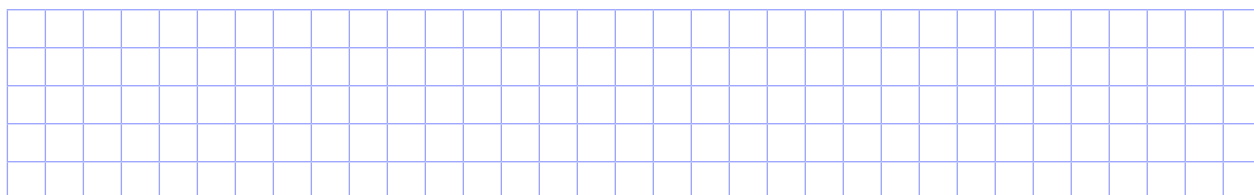
коефіцієнт січної $k = \frac{\Delta f}{\Delta x}$, то при $\Delta x \rightarrow 0$ різницеве відношення приросту функції до приросту аргументу прямує до числа $f'(x_0)$.

Тому число $f'(x_0)$ є *кутовим коефіцієнтом дотичної*, проведеної до графіка функції у точці x_0 .

Отже, існування похідної функції в точці x_0 — це існування дотичної до графіка функції в точці $(x_0; f(x_0))$. При цьому, кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює похідній функції в точці x_0 , тобто числу $f'(x_0)$.

У цьому полягає *геометричний зміст похідної*: $k = f'(x_0) = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha$.

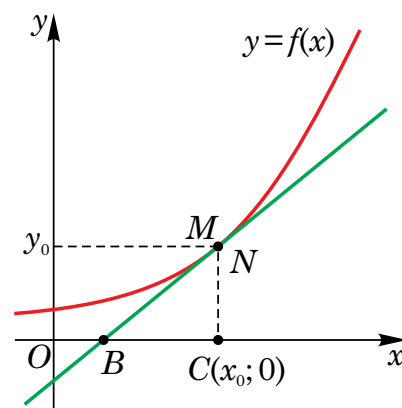
Приклад 4. Обчисліть кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіків функції $f(x) = 4x - 0,5x^3$ у точці $x_0 = 3$.



V. Означення диференційовності функції

Означення. Функцію, що має похідну в точці x_0 , називають *диференційовною* в цій точці.

Нехай D_1 — множина точок, у яких функція $f(x)$ диференційовна. Поставивши у відповідність кожному числу $x \in D_1$ число $f'(x_0)$, отримаємо нову функцію з областю визна-



чення D_1 . Ця функція називається *похідною функції* $y = f(x)$ на всій області визначення і позначається $f'(x)$ або y' .

Знаходження похідної даної функції $f(x)$ називається **диференціюванням**.

Наприклад, оскільки $(x_0^3)' = 3x_0^2$, то $(x^3)' = 3x^2$.

Розглянемо який зв'язок існує між неперервністю функції в точці й диференційованістю її в цій точці.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ у точці x_0 диференційовна, то вона в цій точці неперервна.

Доведення. Нехай $f(x)$ у точці x_0 має похідну $f'(x_0)$, тобто $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$.

Запишемо приріст функції $\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Delta x$.

Тоді $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \Delta x \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0$.

Отже, границя приросту функції в точці x_0 дорівнює нулю. Тому функція $f(x)$ в точці x_0 є неперервною.

VI. Фізичний зміст похідної

Оскільки похідна функції характеризує швидкість зміни функції, то похідна функції має широке застосування у різноманітних процесах, які описують зміну певної величини.

Приклад 1. Миттєва швидкість.

Миттєва швидкість руху тіла:

$$v(t_0) = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t},$$

якщо $\Delta x \rightarrow 0$.

Тобто $v(t_0) = s'(t_0)$ або $v(t) = s'(t)$.

Приклад 2. Прискорення тіла.

Швидкість зміни миттєвої швидкості руху тіла — це прискорення:

$$a(t_0) = v'(t_0) \text{ або } a(t) = v'(t).$$

Приклад 3. Сила струму.

Нехай $q = q(t)$ — кількість електрики (потік електронів), що проходить через поперечний переріз провідника за деякий проміжок часу $[0; t]$.

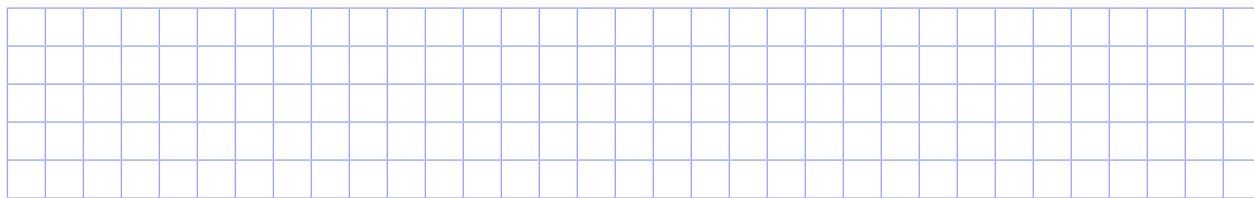
Тоді $\Delta q(t_0) = q(t_0 + \Delta t) - q(t_0)$ — кількість електрики, яка проходить, через вказаний переріз за проміжок часу $[t_0; t_0 + \Delta t]$.

Величину $\frac{\Delta q(t_0)}{\Delta t}$ називають середньою силою струму за проміжок часу $[t_0; t_0 + \Delta t]$.

Якщо $\Delta t \rightarrow 0$, то відношення $\frac{\Delta q(t_0)}{\Delta t} = I(t_0)$ виражає силу струму в даний момент часу t_0 .

Таким чином, сила струму є похідною за часом від кількості електрики, що проходить через поперечний переріз провідника: $I(t_0) = q'(t_0)$ або $I(t) = q'(t)$.

Приклад 5. Нехай у момент часу t через поперечний переріз провідника проходить кількість електрики $q = \sqrt{2+t}$. Знайдіть силу струму в момент $t = 2$ с.



VII. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Команда учнів та учениць 11 класу бере участь у шкільному STEM-конкурсі «Smart Mobility». Перед ними стоїть завдання — змодельовати рух електросамоката при спуску з пагорба. З міркувань безпеки потрібно дослідити, як змінюється швидкість самоката в кожний момент часу та чи є небезпека перевищення критичної швидкості. В результаті виконаних вимірювань учасники/учасниці команди змодельовали функцію $s(t) = 2t^2 + 3t$, яка описує залежність шляху $s(t)$, пройденного самокатом (у метрах), від часу t (у секундах).

1. Знайдіть миттєву швидкість електросамоката через 2 секунди після початку руху.
2. Запишіть означення похідної функції в точці та знайдіть похідну $s'(t_0)$ і поясніть, що означає значення $s'(2)$.
3. Побудуйте графік $s(t)$ при $t \in [0; 4]$ та проведіть дотичну в точці $t = 2$ с. Який геометричний зміст має похідна у цій точці?
4. Як значення похідної допомагає оцінити безпечний спуск на електросамокаті, якщо гранична допустима швидкість становить 12 м/с?

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Обчисліть $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ у точці x_0 , якщо:
 - 1) $f(x) = 2x^2$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,001$;
 - 2) $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,05$.
2. Знайдіть похідну функції $f(x)$ у точці x_0 , якщо:
 - 1) $f(x) = x^3$, $x_0 = 2$;
 - 2) $f(x) = 4 - 2x$, $x_0 = 0,5$;
 - 3) $f(x) = 3x - 2$, $x_0 = 5$;
 - 4) $f(x) = x^2$, $x_0 = 2,5$.
3. За означенням похідної, знайдіть похідну функції $f(x)$, якщо:
 - 1) $f(x) = x^2 - 3x$ у точках -1 ; 2 ;
 - 2) $f(x) = 2x^3$ у точках 0 ; 1 ;
 - 3) $f(x) = \frac{1}{x}$ у точках 3 ; 0 .

4. Установіть відповідність між твердженням (1–4) та тотожним йому твердженням (А–Д).

Твердження

1 $f'(3) = 5$.

2 Функція набуває значення 5 в точці 3.

3 Дотична в точці $(3; f(3))$ має кутовий коефіцієнт 5.

4 $f'(5) = 3$.

Тотожне твердження

А Дотична в точці $(5; f(5))$ має кутовий коефіцієнт 3.

Б $f(5) = 3$.

В Похідна функції набуває значення 3 в точці 5.

Г $f(3) = 5$.

Д Похідна функції набуває значення 5 в точці 3.

А Б В Г Д

1 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

2 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

3 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

4 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

5. Дано функцію $f(x) = 3x^2 - 2$. Заповніть таблицю та побудуйте графік функції. Побудуйте графік похідної функції, використовуючи табличні значення.

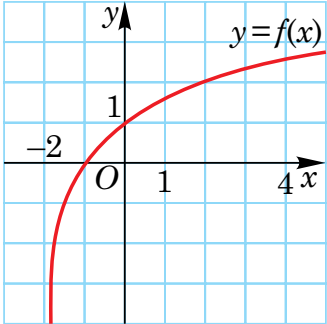
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							
$f'(x)$							

Рівень В

- Знайдіть загальний вигляд похідної функції:
1) $f(x) = 4x^2$; 2) $f(x) = 4$; 3) $f(x) = -5x^2 + 2x$; 4) $f(x) = 2x - 1$.
- Прямолінійний рух точки задано рівнянням $y = 2t^2 - 8t - 10$, де t — час (в секундах), y — шлях (у метрах). Знайдіть швидкість руху точки при $t = 8$ с.
- Знайдіть миттєву швидкість точки в момент часу $t = 1$ с, якщо закон руху задано формулою $y = t^3 - 2t^2 + 2$.
- Знайдіть кут нахилу до осі абсцис дотичної до кривої $y = \sin x + 2\cos x$ в точці $x = \frac{\pi}{2}$.
- Знайдіть точки, в яких дотична до графіка функції $y = \cos x + \frac{1}{8}\cos 2x$ паралельна осі абсцис.
- Знайдіть похідну функцію $y = \sqrt[3]{x+1}$ в точці $x_0 = 0$, користуючись означенням похідної.
- Знайдіть, під якими кутами перетинаються графіки функцій $f(x) = x^2 - 4x + 4$ та $g(x) = x^2 + 6x - 4$.

Рівень С

- Побудуйте графік функції $f(x)$ і проведіть дотичну, яка проходить через точку з абсцисою x_0 . Користуючись рисунком, визначте знак кутового коефіцієнта дотичної:
1) $f(x) = x^2 - 2x - 3$, $x_0 = 3$, $x_0 = 2$, $x_0 = -1$; 2) $f(x) = 0,5x^2 + 1$, $x_0 = -2$, $x_0 = -1$, $x_0 = 2$.
- Точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = \sqrt{t}$, де t — час (у секундах), x — координата точки (у метрах). Через 4 с після початку руху точка почала рухатись рівномірно зі сталою швидкістю. Запишіть закон руху точки та побудуйте відповідний графік.

- 3.** Кількість електрики, яка проходить через поперечний переріз провідника, змінюється за законом $Q(t) = 2t^2 - 2$, де $Q(t)$ — кількість електрики (у Кл); t — час (у с).
- 1) Визначте середню силу струму на проміжку $[2; 4]$.
 - 2) Силу струму в момент $t = 2,25$ с.
- 4.** Обчисліть значення $f'(1)$, $f'(2)$ та $f'(-4)$ для функції $f(x) = 4x + 1$. Побудуйте графік функції $f(x)$ та поясніть знайдені значення.
- 5.** Камінь вільно падає з висоти 45 м. Висота падіння (у метрах) обчислюється за формулою $f(t) = 5t^2$, де t — час (у секундах).
- 1) На якій висоті над землею і яку швидкість матиме камінь через 2 секунди?
 - 2) Через який час і з якою швидкістю камінь упаде на землю?
- 6.** Знайдіть середню швидкість точки, що рухається по прямій, за проміжок часу $[t_0; t_0 + \Delta t]$, якщо відомий закон руху:
- 1) $x(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$;
 - 2) $x(t) = -at + b$;
 - 3) $x(t) = \frac{gt^2}{2}$;
 - 4) $x(t) = at - b$.
- 7.** Оберіть правильні твердження 1) – 5) (див. графік).
- 1) Графік похідної функції $f'(x)$ на проміжку $[-2; 2]$ лежить у верхній півплощині;
 - 2) $f'(-1) = 0$;
 - 3) $f'(0) > f'(1)$;
 - 4) $f(0) = 1$;
 - 5) $f'(0) = 1$.
- 
- 8.** Знайдіть y' , обчислюючи $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Укажіть область існування похідної:
- 1) $y = x^2 - 10$;
 - 2) $y = \frac{1}{x^2}$;
 - 3) $y = \sqrt[3]{x}$;
 - 4) $y = \arccos x$.
- 9.** Запишіть формулу похідної функції в точці x_0 :
- 1) $y = 4 - x + 2\pi$;
 - 2) $y = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x^3}$;
 - 3) $y = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{2}$;
 - 4) $y = \frac{x+1}{x-1}$.

Рефлексія

- 1.** Подумай.
 - Що для мене сьогодні стало новим в означенні похідної?
 - У чому була найбільша складність?
 - Де я міг би (-могла б) застосувати означення похідної у практичних задачах?
- 2.** Обговори в парі.
 - В яких життєвих ситуаціях важливо знати не лише «скільки», а й «як швидко змінюється»?
 - Поясни, що означає: «Похідна — це швидкість зміни ...».

Можливі теми проєктів

1. Похідна в фізиці: як описати рух автомобіля на різних ділянках дороги.
2. Біологія росту: похідна при аналізі швидкості росту рослини/організму.
3. Похідна у фінансах: як фінансові аналітики прогнозують різкі зміни цін акцій або коливань курсу валют.
4. Побудова індивідуальних графіків «втоми» й «мотивації» та їхніх похідних.

