

Урок 6. **Поняття похідної**

Тип уроку: урок засвоєння нових знань.

План уроку

1. Означення похідної функції в точці.
2. Графічна ілюстрація похідної функції в точці.
3. Геометричний зміст похідної функції в точці. Механічний зміст похідної.
4. Означення диференційовності функції.
5. Графічна ілюстрація існування похідної функції в точці.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

оцінює достовірність і доцільність використання даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.2–1 П];

упорядковує та перетворює інформацію математичного змісту в специфічних проблемних ситуаціях, зокрема із застосуванням інформаційних технологій [12 МАО 2.1.3–1 П];

планує дії та організовує роботу групи, ураховуючи розподіл ролей та оцінюючи внесок кожного [12 МАО 2.2.3–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Перед початком вивчення теми запропонуйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям розв'язати приклади на повторення на ваш вибір.
- 3) Сформулюйте (без розв'язання) практичну задачу.
- 4) Теорію подавайте стисло. Зразки можливого подання теорії наводяться.
- 5) До кожного теоретичного твердження наведено ілюстративні приклади. Обирайте їх на свій розсуд. Доведення формул і властивостей проводьте в обсязі, достатньому для розуміння суті того, що доводиться.
- 6) Увесь практичний матеріал та приклади, що ілюструють поняття похідної, диференційовності та їхній геометричний і фізичний зміст, обирайте у межах часових можливостей

уроку. За потреби частину прикладів можна винести на самостійне опрацювання або на домашнє завдання.

7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С.

9) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2–3 хв)

Мотиваційні запитання

1) Фахівці ІТ-компанії стежать за тим, як змінюється кількість даних, що проходять через сервер щосекунди. Чому недостатньо знати лише загальну кількість переданих даних за годину, якщо нас цікавить, чи сервер справляється із навантаженням у конкретну секунду?

2) Програміст перевіряє сигнал, що передається мережею. Якщо сигнал стрибкоподібний, у деяких точках неможливо сказати, якою є швидкість зміни сигналу в дану мить. Чому різкі стрибки сигналу можуть стати проблемою для передавання даних? Як перевірити, чи змінюється сигнал плавно у всіх точках?

3) Дизайнер працює з переходами кольорів на фотосвітлинах. На графіку видно зміну яскравості. Якщо на кривій є різкі злами, плавного переходу кольору не буде. Чому різкий злам на кривій яскравості псує плавний перехід кольору? Як на графіку помітити, що перехід кольору буде нерівномірним?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Прямолінійний рух точки задано рівнянням $s = 3t^2 - 2t + 5$, де t — час (в секундах), s — переміщення (в метрах). Знайдіть швидкість руху точки в момент $t = 5$ с.
Відповідь. 28 м/с.
2. Знайдіть різницеве відношення приросту функції до приросту аргументу для функції $f(x)$ у вказаній точці, якщо $f(x) = x^2 + 1$, $x_0 = -1$, $\Delta x = 0,1$.
Відповідь. $-1,9$.
3. Для функції $f(x) = x^2 - 3x$ виразіть приріст Δf функції у точці x_0 , якщо $x_0 = 3$, $x = 2,5$.
Відповідь. $-1,25$.
4. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції $f(x)$, у точці $x_0 = 2$, якщо дотична утворює кут 30° з додатним напрямком осі абсцис.
Відповідь. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Команда учнів та учениць 11 класу бере участь у шкільному STEM-конкурсі «Smart Mobility». Перед ними стоїть завдання — змодельовати рух електросамоката при спуску з пагорба. З міркувань безпеки потрібно дослідити, як змінюється швидкість самоката в кожний момент часу та чи є небезпека перевищення критичної швидкості. В результаті виконаних вимірювань учасники/учасниці команди змодельовали функцію $s(t) = 2t^2 + 3t$, яка описує залежність шляху $s(t)$, пройдемого самокатом (у метрах), від часу t (у секундах).

1. Знайдіть миттєву швидкість електросамоката через 2 секунди після початку руху.
2. Запишіть означення похідної функції в точці та знайдіть похідну $s'(t_0)$ і поясніть, що означає значення $s'(2)$.
3. Побудуйте графік $s(t)$ при $t \in [0; 4]$ та проведіть дотичну в точці $t = 2$ с. Який геометричний зміст має похідна у цій точці?
4. Як значення похідної допомагає оцінити безпечний спуск на електросамокаті, якщо гранична допустима швидкість становить 12 м/с?

III. Означення похідної

Задачі обчислення кутового коефіцієнта дотичної до графіка функції в точці з абсцисою x_0 і знаходження миттєвої швидкості руху тіла мають подібне розв'язання. У задачах знаходиться різницеве відношення приросту функції до приросту аргументу.

Постановка таких задач приводить до загальної задачі — обчислення похідної функції в заданій точці.

Схема обчислення похідної функції в точці

1. За допомогою формули, що задає функцію $f(x)$, знаходимо її приріст у точці x_0 :
$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$
2. Знаходимо вираз для різнищового відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

3. З'ясуємо, до якого числа прямує різницеве відношення приросту функції до приросту аргументу $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, якщо приріст аргументу Δx прямує до нуля.

Це можна записати так: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$, читається «еф штрих від x_0 ».

Знайдене таким чином число називають *швидкістю зміни функції $f(x)$ у точці x_0* або *похідною функції $f(x)$ у точці x_0* .

Означення. *Похідною функції $f(x)$ у точці x_0 називається число, до якого прямує різницеве відношення приросту функції до приросту аргументу, якщо приріст аргументу прямує до нуля.*

Ілюстративні приклади

- 5.** Знайдіть похідну функції $f(x) = x^3$ у точці x_0 .

Розв'язання. Приріст функції: $\Delta f = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$.

Різницеве відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2, \Delta x \neq 0.$$

Якщо $\Delta x \rightarrow 0$, то значення виразів $3x_0\Delta x$ і $(\Delta x)^2$, також прямують до нуля.

Оскільки x_0 — задане число, то доданок $3x_0^2$ незмінний.

Отже, $\frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow 3x_0^2$, якщо $\Delta x \rightarrow 0$. Таким чином, $f'(x_0) = 3x_0^2$.

Відповідь. $3x_0^2$.

- 6.** Знайдіть похідну функції $f(x) = kx + b$, де k і b — деякі числа, в точці x_0 .

Розв'язання. Приріст функції: $\Delta f = (k(x_0 + \Delta x) + b) - (kx_0 + b) = k\Delta x$.

Знайдемо границю: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{k\Delta x}{x\Delta} = k$. Отже, $f'(x_0) = k$.

Відповідь. k .

- 7*.** Доведіть, що функція $y = |x|$ в точці $x_0 = 0$ похідної не має.

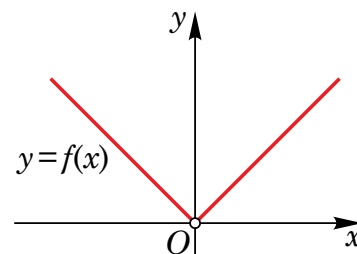
Доведення. Знайдемо приріст заданої функції в точці $x_0 = 0$. Маємо $\Delta y = |\Delta x|$.

Знайдемо відношення: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \Delta x > 0, \\ -1, & \Delta x < 0. \end{cases}$

Звідси випливає, що відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$ границі

не має. Це відношення має правосторонню границю, яка дорівнює 1 і лівосторонню, яка дорівнює -1 , але границі не рівні між собою.

Варто зауважити, що згідно з графіком $y = |x|$ у точці $O(0; 0)$ провести дотичну не можна. У цій точці крива, яка є графіком функції, має злом (див. рисунок).



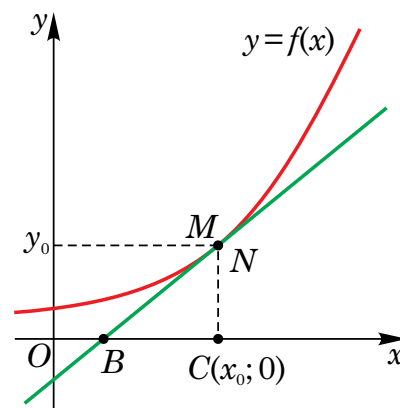
IV. Геометричний зміст похідної

Розглянемо січну NM , проведену через N і M графіка функції $f(x)$. Нехай точка N , рухаючись по графіку функції, наближається до точки M (див. рисунок). Тоді приріст аргументу прямує до 0.

Тоді графік функції $f(x)$ поблизу точки x_0 практично не відрізняється від відрізка січної, що проходить через точки $(x_0; f(x_0))$ і $(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$. Січна графіка функції, яка проходить через точки M і N , перетворюється на дотичну до графіка функції у точці x_0 (пряма BM), при $\Delta x \rightarrow 0$.

Отже, дотична до графіка функції в точці x_0 є граничним положенням січної, якщо $\Delta x \rightarrow 0$. Оскільки кутівий

коефіцієнт січної $k = \frac{\Delta f}{\Delta x}$, то при $\Delta x \rightarrow 0$ різницеве відношення приросту функції до приросту аргументу прямує до числа $f'(x_0)$.



Тому число $f'(x_0)$ є кутовим коефіцієнтом дотичної, проведеної до графіка функції у точці x_0 .

Отже, існування похідної функції в точці x_0 — це існування дотичної до графіка функції в точці $(x_0; f(x_0))$. При цьому, кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює похідній функції в точці x_0 , тобто числу $f'(x_0)$.

У цьому полягає геометричний зміст похідної: $k = f'(x_0) = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha$.

Ілюстративний приклад

8. Обчисліть кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіків функції $f(x) = 4x - 0,5x^3$ у точці $x_0 = 3$.

Розв'язання. Знайдемо приріст функції:

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 4(x_0 + \Delta x) - 0,5(x_0 + \Delta x)^3 - 4x_0 + 0,5x_0^3 = \\ &= 4x_0 + 4\Delta x - 0,5x_0^3 - 1,5x_0^2\Delta x - 1,5x_0\Delta x^2 - 0,5(\Delta x)^3 - 4x_0 + 0,5x_0^3 = \\ &= 4\Delta x - 1,5x_0^2\Delta x - 1,5x_0\Delta x^2 - 0,5\Delta x^3.\end{aligned}$$

$$\text{Тоді } \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta x(4 - 1,5x_0^2 - 1,5x_0\Delta x - 0,5\Delta x^2)}{\Delta x} = 4 - 1,5x_0^2 - 1,5x_0\Delta x - 0,5\Delta x^2.$$

Оскільки $\Delta x \rightarrow 0$, то $k = f'(x_0) = 4 - 1,5x_0^2$.

Отже, $f'(x_0) = f'(3) = 4 - 1,5 \cdot 9 = -9,5$.

Відповідь. $-9,5$.

V. Означення диференційовності функції

Означення. Функцію, що має похідну в точці x_0 , називають *диференційовною* в цій точці.

Нехай D_1 — множина точок, у яких функція $f(x)$ диференційовна. Поставивши у відповідність кожному числу $x \in D_1$ число $f'(x_0)$, отримуємо нову функцію з областю визначення D_1 . Ця функція називається *похідною функції* $y = f(x)$ на всій області визначення і позначається $f'(x)$ або y' .

Знаходження похідної даної функції $f(x)$ називається *диференціюванням*.

Наприклад, оскільки $(x_0^3)' = 3x_0^2$, то $(x^3)' = 3x^2$.

Розглянемо який зв'язок існує між неперервністю функції в точці й диференційовністю її в цій точці.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ у точці x_0 диференційовна, то вона в цій точці неперервна.

Доведення. Нехай $f(x)$ у точці x_0 має похідну $f'(x_0)$, тобто $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$.

Запишемо приріст функції $\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Delta x$.

$$\text{Тоді } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \Delta x \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Отже, границя приросту функції в точці x_0 дорівнює нулю. Тому функція $f(x)$ в точці x_0 є неперервною.

VI. Фізичний зміст похідної

Оскільки похідна функції характеризує швидкість зміни функції, то похідна функції має широке застосування у різноманітних процесах, які описують зміну певної величини.

Приклад 1. Миттєва швидкість.

Миттєва швидкість руху тіла:

$$v(t_0) = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t},$$

якщо $\Delta x \rightarrow 0$.

Тобто $v(t_0) = s'(t_0)$ або $v(t) = s'(t)$.

Приклад 2. Прискорення тіла.

Швидкість зміни миттєвої швидкості руху тіла — це прискорення:

$$a(t_0) = v'(t_0) \text{ або } a(t) = v'(t).$$

Приклад 3. Сила струму.

Нехай $q = q(t)$ — кількість електрики (потік електронів), що проходить через поперечний переріз провідника за деякий проміжок часу $[0; t]$.

Тоді $\Delta q(t_0) = q(t_0 + \Delta t) - q(t_0)$ — кількість електрики, яка проходить, через вказаний переріз за проміжок часу $[t_0; t_0 + \Delta t]$.

Величину $\frac{\Delta q(t_0)}{\Delta t}$ називають середньою силою струму за проміжок часу $[t_0; t_0 + \Delta t]$.

Якщо $\Delta t \rightarrow 0$, то відношення $\frac{\Delta q(t_0)}{\Delta t} = I(t_0)$ виражає силу струму в даний момент часу t_0 .

Таким чином, сила струму є похідною за часом від кількості електрики, що проходить через поперечний переріз провідника: $I(t_0) = q'(t_0)$ або $I(t) = q'(t)$.

Ілюстративний приклад

9. Нехай у момент часу t через поперечний переріз провідника проходить кількість електрики $q = \sqrt{2+t}$. Знайдіть силу струму в момент $t = 2$ с.

Розв'язання. Знайдемо відношення приросту електрики до приросту часу:

$$I(t_0) = \frac{\sqrt{2+t_0+\Delta t} - \sqrt{2+t_0}}{\Delta t} = \frac{(2+t_0+\Delta t) - (2+t_0)}{\Delta t(\sqrt{2+t_0+\Delta t} + \sqrt{2+t_0})} = \frac{1}{\sqrt{2+t_0+\Delta t} + \sqrt{2+t_0}}.$$

Оскільки $\Delta t \rightarrow 0$, то отримаємо $I(t_0) = \frac{1}{2\sqrt{2+t_0}}$.

Отже, $I(2) = 0,25$ (А).

Відповідь. 0,25 А.

VII. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (8–10 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Команда учнів та учениць 11 класу бере участь у шкільному STEM-конкурсі «Smart Mobility». Перед ними стоїть завдання — змодельовати рух електросамоката при спуску з пагорба. З міркувань безпеки потрібно дослідити, як змінюється швидкість самоката в кожний момент часу та чи є небезпека перевищення критичної швидкості. В результаті виконаних вимірювань учасники/учасниці команди змодельовали функцію $s(t) = 2t^2 + 3t$, яка описує залежність шляху $s(t)$, пройденного самокатом (у метрах), від часу t (у секундах).

1. Знайдіть миттєву швидкість електросамоката через 2 секунди після початку руху.
2. Запишіть означення похідної функції в точці та знайдіть похідну $s'(t_0)$ і поясніть, що означає значення $s'(2)$.
3. Побудуйте графік $s(t)$ при $t \in [0; 4]$ та проведіть дотичну в точці $t = 2$ с. Який геометричний зміст має похідна у цій точці?
4. Як значення похідної допомагає оцінити безпечний спуск на електросамокаті, якщо гранична допустима швидкість становить 12 м/с?

Розв'язання.

1. Миттєва швидкість — це похідна функції, що виражає переміщення, в момент часу $t = t_0$, тобто $v(t_0) = s'(t_0)$.

Знайдемо приріст переміщення:

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = 2(t_0 + \Delta t)^2 + 3(t_0 + \Delta t) - 2t_0^2 - 3t_0 = 2t_0^2 + 4t_0\Delta t + 2\Delta t^2 + 3t_0 + 3\Delta t - 2t_0^2 - 3t_0 = 4t_0\Delta t + 2\Delta t^2 + 3\Delta t.$$

Знайдемо різницеве відношення приросту переміщення до приросту часу:

$$v(t_0) = \frac{4t_0\Delta t + 2(\Delta t)^2 + 3\Delta t}{\Delta t} = 4t_0 + 2\Delta t + 3.$$

Якщо $\Delta t \rightarrow 0$, то $v(t_0) = 4t_0 + 3$.

Отже, маємо формулу для обчислення миттєвої швидкості руху.

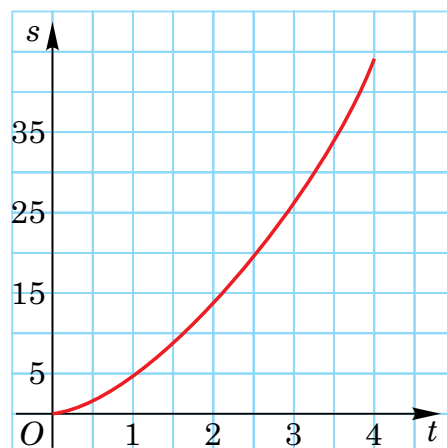
Якщо $t = 2$ с, то $v(2) = 4 \cdot 2 + 3 = 11$ (м/с) — миттєва швидкість через 2 секунди від початку руху.

2. За означенням похідної $s'(t_0)$: $s'(t_0) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{4t_0\Delta t + 2(\Delta t)^2 + 3\Delta t}{\Delta t} = 4t_0 + 2\Delta t + 3$.

Оскільки $\Delta t \rightarrow 0$, то $s'(t) = 4t + 3$.

Якщо $t = 2$ с, то $s'(2) = 11$ м/с означає, що самокат рухався зі швидкістю 11 м/с у момент часу 2 секунди. Це є миттєва швидкість руху, тобто швидкість зміни положення електросамоката при $t = 2$ с.

3. Графік функції $s(t) = 2t^2 + 3t$ на проміжку $[0; 4]$ (див. рисунок).



Проведемо дотичну до графіка в точці $t_0 = 2$ (див. рисунок).

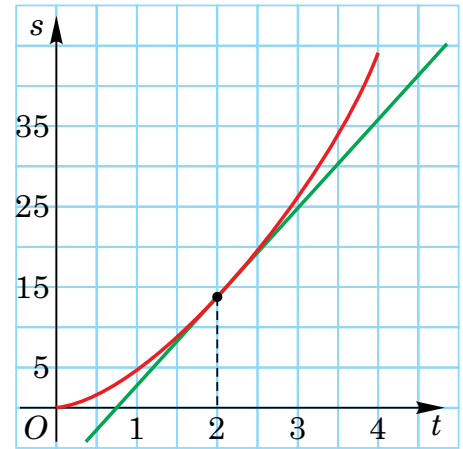
Похідна $s'(2) = 11$ — це кутовий коефіцієнт дотичної у точці $t_0 = 2$.

Отже, похідна в точці дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка функції в цій точці. Таким чином, $k = \operatorname{tg} \alpha = 11$.

4. Оскільки миттєва швидкість руху на другій секунді $v(2) = s'(2) = 11$ м/с, то електросамокат на цій ділянці рухається безпечно, бо 11 м/с $<$ 12 м/с.

Проте, з урахуванням зростання функції $s'(t) = 4t + 3$, швидкість надалі збільшується.

Відповідь. 11 м/с, $s'(t) = 4t + 3$.



VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

- Обчисліть $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ у точці x_0 , якщо:
 - $f(x) = 2x^2$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,001$;
 - $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,05$.
- Знайдіть похідну функції $f(x)$ у точці x_0 , якщо:
 - $f(x) = x^3$, $x_0 = 2$;
 - $f(x) = 4 - 2x$, $x_0 = 0,5$;
 - $f(x) = 3x - 2$, $x_0 = 5$;
 - $f(x) = x^2$, $x_0 = 2,5$.
- За означенням похідної, знайдіть похідну функції $f(x)$, якщо:
 - $f(x) = x^2 - 3x$ у точках -1 ; 2 ;
 - $f(x) = 2x^3$ у точках 0 ; 1 ;
 - $f(x) = \frac{1}{x}$ у точках 3 ; 0 .
- Установіть відповідність між твердженням (1–4) та тотожним йому твердженням (А–Д).

Твердження	Тотожне твердження	
1 $f'(3) = 5$.	А Дотична в точці $(5; f(5))$ має кутовий коефіцієнт 3.	1 ☐ А ☐ Б ☐ В ☐ Г ☐ Д
2 Функція набуває значення 5 в точці 3.	Б $f(5) = 3$.	2 ☐ А ☐ Б ☐ В ☐ Г ☐ Д
3 Дотична в точці $(3; f(3))$ має кутовий коефіцієнт 5.	В Похідна функції набуває значення 3 в точці 5.	3 ☐ А ☐ Б ☐ В ☐ Г ☐ Д
4 $f'(5) = 3$.	Г $f(3) = 5$.	4 ☐ А ☐ Б ☐ В ☐ Г ☐ Д
	Д Похідна функції набуває значення 5 в точці 3.	
- Дано функцію $f(x) = 3x^2 - 2$. Заповніть таблицю та побудуйте графік функції. Побудуйте графік похідної функції, використовуючи табличні значення.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							
$f'(x)$							

Рівень В

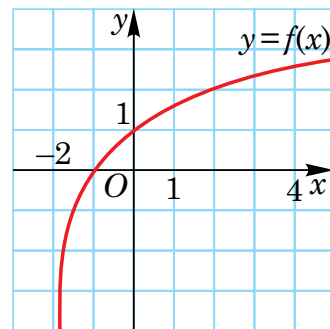
- Знайдіть загальний вигляд похідної функції:
1) $f(x) = 4x^2$; 2) $f(x) = 4$; 3) $f(x) = -5x^2 + 2x$; 4) $f(x) = 2x - 1$.
- Прямолінійний рух точки задано рівнянням $y = 2t^2 - 8t - 10$, де t — час (в секундах), y — шлях (у метрах). Знайдіть швидкість руху точки при $t = 8$ с.
- Знайдіть миттєву швидкість точки в момент часу $t = 1$ с, якщо закон руху задано формулою $y = t^3 - 2t^2 + 2$.
- Знайдіть кут нахилу до осі абсцис дотичної до кривої $y = \sin x + 2\cos x$ в точці $x = \frac{\pi}{2}$.
- Знайдіть точки, в яких дотична до графіка функції $y = \cos x + \frac{1}{8}\cos 2x$ паралельна осі абсцис.
- Знайдіть похідну функцію $y = \sqrt[3]{x+1}$ в точці $x_0 = 0$, користуючись означенням похідної.
- Знайдіть, під якими кутами перетинаються графіки функцій $f(x) = x^2 - 4x + 4$ та $g(x) = x^2 + 6x - 4$.

Рівень С

- Побудуйте графік функції $f(x)$ і проведіть дотичну, яка проходить через точку з абсцисою x_0 . Користуючись рисунком, визначте знак кутового коефіцієнта дотичної:
1) $f(x) = x^2 - 2x - 3$, $x_0 = 3$, $x_0 = 2$, $x_0 = -1$; 2) $f(x) = 0,5x^2 + 1$, $x_0 = -2$, $x_0 = -1$, $x_0 = 2$.
- Точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = \sqrt{t}$, де t — час (у секундах), x — координата точки (у метрах). Через 4 с після початку руху точка почала рухатись рівномірно зі сталою швидкістю. Запишіть закон руху точки та побудуйте відповідний графік.
- Кількість електрики, яка проходить через поперечний переріз провідника, змінюється за законом $Q(t) = 2t^2 - 2$, де $Q(t)$ — кількість електрики (у Кл); t — час (у с).
1) Визначте середню силу струму на проміжку $[2; 4]$.
2) Силу струму в момент $t = 2,25$ с.
- Обчисліть значення $f'(1)$, $f'(2)$ та $f'(-4)$ для функції $f(x) = 4x + 1$. Побудуйте графік функції $f(x)$ та поясніть знайдені значення.
- Камінь вільно падає з висоти 45 м. Висота падіння (у метрах) обчислюється за формулою $f(t) = 5t^2$, де t — час (у секундах).
1) На якій висоті над землею і яку швидкість матиме камінь через 2 секунди?
2) Через який час і з якою швидкістю камінь упаде на землю?
- Знайдіть середню швидкість точки, що рухається по прямій, за проміжок часу $[t_0; t_0 + \Delta t]$, якщо відомий закон руху:
1) $x(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$; 2) $x(t) = -at + b$; 3) $x(t) = \frac{gt^2}{2}$; 4) $x(t) = at - b$.

7. Оберіть правильні твердження 1) – 5) (див. графік).

- 1) Графік похідної функції $f'(x)$ на проміжку $[-2; 2]$ лежить у верхній півплощині;
- 2) $f'(-1) = 0$;
- 3) $f'(0) > f'(1)$;
- 4) $f(0) = 1$;
- 5) $f'(0) = 1$.



8. Знайдіть y' , обчислюючи $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Укажіть область існування похідної:

- 1) $y = x^2 - 10$;
- 2) $y = \frac{1}{x^2}$;
- 3) $y = \sqrt[3]{x}$;
- 4) $y = \arccos x$.

9. Запишіть формулу похідної функції в точці x_0 :

- 1) $y = 4 - x + 2\pi$;
- 2) $y = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x^3}$;
- 3) $y = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{2}$;
- 4) $y = \frac{x+1}{x-1}$.

IX. Рефлексія (2 хв)

1. Подумай.

- Що для мене сьогодні стало новим в означенні похідної?
- У чому була найбільша складність?
- Де я міг би (-могла б) застосувати означення похідної у практичних задачах?

2. Обговори в парі.

- В яких життєвих ситуаціях важливо знати не лише «скільки», а й «як швидко змінюється»?
- Поясни, що означає: «Похідна — це швидкість зміни ...».

Можливі теми проєктів

1. Похідна в фізиці: як описати рух автомобіля на різних ділянках дороги.
2. Біологія росту: похідна при аналізі швидкості росту рослини/організму.
3. Похідна у фінансах: як фінансові аналітики прогнозують різкі зміни цін акцій або коливань курсу валют.
4. Побудова індивідуальних графіків «втоми» й «мотивації» та їхніх похідних.

Список використаної літератури

- 1) Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу: профільний рівень: підручн. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. — Х. : Гімназія, 2018. — 400 с. : іл.
- 2) Шкіль М. І., Слєпкань З. І., Дубинчук О. С. Алгебра і початки аналізу: підручн. для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів. — К. : Зодіак-ЕКО, 2007. — 384 с.
- 3) Афанасьєв О. М., Бродський Я. С., Павлов О. Л., Сліпенко А. К. Алгебра і початки аналізу: підручн. для 10 класу (пробний). — Тернопіль : Навчальна книга — Богдан, 2004. — 456 с.