

Урок 7. Похідні лінійної, степеневі та тригонометричних функцій (синус і косинус)

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) вивчите означення неперервності функції;
- 2) навчитеся визначати, чи є функція неперервною в заданій точці;
- 3) навчитеся знаходити похідну лінійної функції, степеневі функції та тригонометричних функцій синус і косинус;
- 4) зрозумієте, як похідна функції визначає швидкість зміни величини;
- 5) повторите геометричний зміст похідної функції;
- 6) з'ясуєте застосування похідної функції у практичних задачах.

II. Повторення

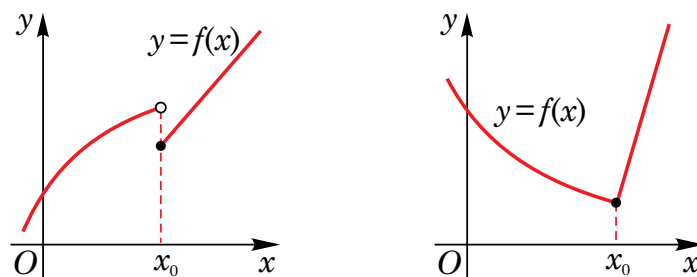
1. Знайдіть різницеве відношення приросту функції $f(x) = x^2$ до приросту аргументу, якщо $x_0 = 2$, $\Delta x = 0,1$.
2. Знайдіть приріст функції $f(x) = \sqrt{x}$ при зміні аргументу з $x_1 = 9$ до $x_2 = 9,25$.
3. Обчисліть $f'(0)$, якщо $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$.
4. Матеріальна точка рухається за законом $s(t) = 5t^2 + 2t$, де s — шлях (у м), t — час (у с). Знайдіть миттєву швидкість руху матеріальної точки в момент $t = 3$ с.
5. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = \frac{1}{x}$ у точці $x_0 = 1$.

III. Теорема про неперервність функції, диференційовної у точці

Нехай функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0 . За геометричним змістом похідної — до графіка функції $f(x)$ у точці з абсцисою x_0 можна провести невертикальну дотичну.

І навпаки, якщо до графіка функції $f(x)$ у точці з абсцисою x_0 можна провести невертикальну дотичну, то функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0 (див. рисунок).

На рисунках зображено графіки функцій, які в точці x_0 мають розрив (графік ліворуч) або злам (графік праворуч) і не мають дотичних у цих точках або мають вертикальну дотичну в точці x_0 . Такі функції не диференційовні в точці x_0 .



Якщо $f(x) \rightarrow f(x_0)$, при $x \rightarrow x_0$, то функцію називають *неперервною* в точці x_0 .

При цьому незначній зміні аргументу в точці x_0 відповідають незначні зміни значення функції.

Відомі елементарні функції неперервні в кожній точці своєї області визначення. Графіки таких функцій зображаються неперервними кривими на кожному проміжку з області визначення функції. На цьому і ґрунтується спосіб побудови графіків «за точками».

Теорема. Якщо функція $f(x)$ є диференційовною в точці x_0 , то вона є неперервною в цій точці. Тобто $f(x_0 + \Delta x) \rightarrow f(x_0)$, якщо $\Delta x \rightarrow 0$.

Доведення. Оскільки функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0 , то можна записати

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

$$\text{Маємо } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \Delta x \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

$$\text{Отже, } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0. \text{ Звідси } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (x_0 + \Delta x) = f(x_0).$$

$$\text{Останню рівність можна подати у вигляді } \lim_{\Delta x \rightarrow x_0} f(x_0) = f(x_0).$$

Це означення, що функція $f(x)$ є неперервною в точці x_0 .

Приклад 1. Доведіть, що лінійна функція $f(x) = kx + b$ неперервна в кожній точці області визначення.

Доведення. Необхідно показати, що $|\Delta f|$ стає менше від будь-якого фіксованого $h > 0$ для малих $|\Delta x|$. Але $|\Delta f| = |f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| = |k(x_0 + \Delta x) + b - (kx_0 + b)| = |k| \cdot |\Delta x|$ і $|\Delta f|$ менше від $h > 0$, якщо взяти $|\Delta x| = \frac{h}{|k|}$, коли $k \neq 0$.

IV. Похідна функції на всій області визначення

Позначимо множину точок, у яких функція $f(x)$ диференційовна, через $D(f(x))$. Кожному числу $x_0 \in D(f(x))$ поставимо у відповідність число $f'(x_0)$. Отже, множині точок x_0 відповідає множина точок $f'(x_0)$, тобто маємо нову функцію з областю визначення $D(f(x))$, яка називається **похідною функції** $y = f(x)$ і позначається $f'(x)$ або y' .

Отже, $f'(x)$ — це похідна деякої функції $f(x)$ на всій області визначення функції, тобто у кожній з точок x_0 .

Знаходження похідної функції $y = f(x)$ — це математична дія, яка виконується над функціями, і називається ця дія **диференціюванням функцій**.

V. Похідна лінійної функції

Знайдемо похідну лінійної функції $f(x) = kx + b$ у довільній точці її області визначення. Зафіксуємо довільну точку x_0 і приріст аргументу $\Delta x = x - x_0$.

Знайдемо відповідний приріст функції $y = kx + b$:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = k(x_0 + \Delta x) + b - (kx_0 + b) = k\Delta x.$$

Тоді, середня швидкість зміни значень функції, коли x змінюється від x_0 до $x_0 + \Delta x$, дорівнює: $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{k \cdot \Delta x}{\Delta x} = k$.

Оскільки середня швидкість є сталою і дорівнює k , то похідна функції також є сталою і дорівнює коефіцієнту k , тобто $(kx + b)' = k$.

Розглянемо похідну лінійної функції, за умови, що $k = 0$, тоді $y = b$.

Зафіксуємо довільну точку x_0 і приріст Δx .

Знайдемо відповідний приріст функції $y = b$:

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = b - b = 0.$$

Тоді $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. Оскільки різницеве відношення приросту функції до приросту аргументу дорівнює 0, то $(b)' = 0$.

VI. Похідна степеневі функції

Теорема 2. Похідна степеневі функції $f(x) = x^n$, де $n \in \mathbb{R}$, обчислюється за формулою $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Доведення. Знайдемо похідну функції $f(x)$ у точці x_0 , де x_0 — довільна точка області визначення функції $f(x)$.

Приріст функції $\Delta f = (x_0 + \Delta x)^n - x_0^n$.

Оскільки $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$. Тоді можна записати:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{(x_0 + \Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x - x_0)((x_0 + \Delta x)^{n-1} + (x_0 + \Delta x)^{n-2}x_0 + \dots + x_0^{n-1})}{\Delta x} = \\ &= (x_0 + \Delta x)^{n-1} + (x_0 + \Delta x)^{n-2}x_0 + \dots + x_0^{n-1}. \end{aligned}$$

Отже, $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} ((x_0 + \Delta x)^{n-1} + (x_0 + \Delta x)^{n-2}x_0 + \dots + x_0^{n-1}) = n x_0^{n-1}$.

Оскільки x_0 — довільна точка області визначення $f(x)$, то остання рівність означає, що для будь-якого $x \in R$ виконується рівність $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Наслідок 1. Похідна змінної x дорівнює 1, тобто $x' = 1$.

Наслідок 2. Похідна функції $y = \sqrt{x}$ дорівнює $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Оскільки $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, то $y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Зауваження. Метод обчислення похідної функції $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ є загальним методом знаходження похідних функцій, що містять корені. Тобто формулу, що задає функцію, потрібно перетворити за означенням раціонального показника степеня:

$$y = \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}.$$

Приклад 2. Обчисліть похідну функції $y = x^{10}$.

[illegible]

Приклад 3. Знайдіть похідну функції $y = \sqrt[5]{x^7}$.

[illegible]

VII. Похідні тригонометричних функцій

Теорема 3. Функція синус має похідну в будь-якій точці, яка дорівнює косинусу, тобто $(\sin x)' = \cos x$.

Доведення. При доведенні використаємо формулу:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right).$$

- 1) Знайдемо приріст функції: $\Delta \sin x = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0$.
- 2) Знайдемо значення різницевого відношення приросту функції до приросту аргу-

$$\begin{aligned} \text{менту, якщо } \Delta x \rightarrow 0: \frac{\Delta \sin x}{\Delta x} &= \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \frac{2 \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \\ &= \frac{2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x_0. \end{aligned}$$

Оскільки $(\sin(x_0))' = \cos x_0$, то $(\sin x)' = \cos x$. $f'(1)$

Теорема 4. Функція косинус має похідну в будь-якій точці, яка дорівнює синусу з протилежним знаком, тобто $(\cos x)' = -\sin x$.

Примітка. Для спрощення запису записують: $(\sin x)' = \sin'x$, $(\cos x)' = \cos'x$.

VIII. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Агроном контролює роботу автоматизованої теплиці, в якій встановлено систему керування вентиляторами для підтримання мікроклімату. Вентилятори працюють від електромережі, а через їхній двигун проходить електричний заряд, який описується функцією $q(t) = t^3$, де $q(t)$ — заряд (у кулонах), t — час (у секундах) від моменту вмикання вентилятора.

1. Знайдіть силу струму, який протікає в електричній системі двигуна вентилятора у момент часу $t = 3$ секунди. Що означає отримане значення?
2. Побудуйте графік функції $q(t) = t^3$ та її похідної. За графіками функцій з'ясуйте, як змінюється сила струму з часом.

IX. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

- 1.** Знайдіть похідну функції:

1) $y = 5x - 6$; 2) $y = \frac{1-x}{3}$; 3) $y = 6$; 4) $y = 3 - 0,5x$.

- 2.** Обчисліть значення похідної функції $f(x)$ у точці x_0 :

1) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; 2) $f(x) = \cos x$, $x_0 = -\frac{\pi}{6}$;
3) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$; 4) $f(x) = \cos x$, $x_0 = -\frac{\pi}{4}$.

- 3.** Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції $f(x)$ у точці з абсцисою x_0 :

1) $f(x) = x^3$, $x_0 = -1$; 2) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$; 3) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x_0 = 2$; 4) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$.

- 4.** Матеріальна точка рухається за законом $s(t) = t^2$. Знайдіть $s'(0,5)$. Який фізичний зміст має знайдена величина?

- 5.** Знайдіть похідну функції:

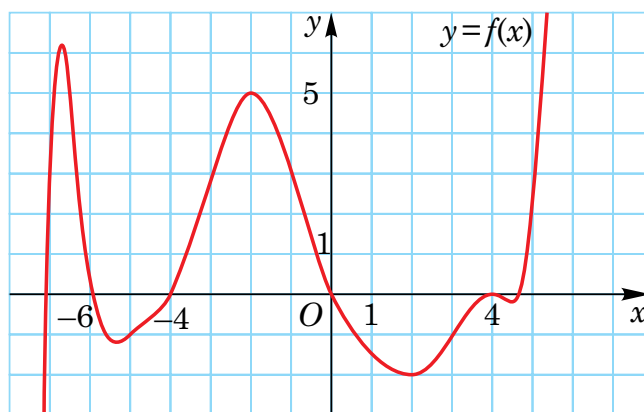
1) $s(t) = t^4$; 2) $h(y) = y^{12}$; 3) $m(a) = a^{-3}$; 4) $g(z) = \frac{1}{z^2}$.

6. Яку помилку було допущено при диференціюванні функції? Виправте її:

1) $f(x) = x^{-3}, f'(x) = -3x^{-2}$; 2) $f(x) = x^{-1}, f'(x) = x^{-2}$; 3) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}, f'(x) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{x}$.

7. На рисунку зображено графік функції $f(x)$. Порівняйте:

- 1) $f'(-5)$ і $f'(1)$;
2) $f'(-2)$ і $f'(4)$;



8. Знайдіть похідну функції $f(x) = x^2|x|$ у точці $x_0 = 0$.

Рівень В

1. Знайдіть похідну функції:

- 1) $y = x^{10}$; 2) $y = x^{-6}$; 3) $y = \frac{1}{x^8}$;
4) $y = 8 - 3x$; 5) $y = x^{\frac{7}{6}}$; 6) $y = x^{-0.2}$.

2. Знайдіть похідну функції:

- 1) $y = \sqrt[4]{x}$; 2) $y = \sqrt[8]{x^7}$; 3) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$;
4) $y = \frac{1}{\sqrt[8]{x^5}}$; 5) $y = \sqrt[9]{x}$; 6) $y = \sqrt[6]{x^5}$.

3. За означенням похідної, знайдіть $f'(x)$:

- 1) $f(x) = \frac{3}{x}$; 2) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$; 3) $f(x) = 4 - x^2$; 4) $f(x) = x^2 + 3x - 2$.

4. Дотична до графіка функції $f(x)$ у точці з абсцисою x_0 має кутовий коефіцієнт k . Знайдіть x_0 :

- 1) $f(x) = x^4, k = 3$; 2) $f(x) = \sqrt{x}, k = 0,25$;
3) $f(x) = \frac{1}{x^2}, k = -0,25$; 4) $f(x) = \sin x, k = 0$.

5. Складіть та розв'яжіть рівняння:

- 1) $f'(x) = f(x)$, якщо $f(x) = x^3$; 2) $g'(x) = -4$, якщо $g(x) = \frac{1}{x}$;
3) $f(x) = f'(x)$, якщо $f(x) = x^2$; 4) $g'(x) = 0,125$, якщо $g(x) = \sqrt{x}$.

6. Одна матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = t^2$, а інша матеріальна точка — за законом $x(t) = t^3$, де t — час (в секундах), x — переміщення (у метрах). У який момент часу t ($t > 0$) їхні швидкості будуть однаковими?

- 7.** Ракета починає рухатись вертикально вгору. Функція $h(t) = t^3$, де t — час (в секундах), $h(t)$ — висота (в метрах) визначає висоту підйому ракети впродовж перших двох секунд польоту.
- 1) Якої висоти та швидкості досягне ракета через 1,2 секунди після старту?
 - 2) В який момент часу ракета рухатиметься зі швидкістю 12 м/с?
- 8.** Доведіть, користуючись означенням, що функція $y = \sqrt[3]{x^4}$ є диференційовною в точці $x_0 = 0$. Знайдіть її похідну в цій точці.

Рівень С

- 1.** Обчисліть значення похідної функції $f(x)$ у точці x_0 :
- 1) $f(x) = x\sqrt{x}$, $x_0 = 81$;
 - 2) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x}}$, $x_0 = 16$;
 - 3) $f(x) = x^3\sqrt[4]{x}$, $x_0 = 1$;
 - 4) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[6]{x}}$, $x_0 = 64$.
- 2.** Після епідемії грипу кількість інфікованих людей зменшується. У момент часу t після початку спостереження було інфіковано $k(t) = \frac{5}{t}$ людей ($2 \leq t \leq 5$, у тижнях, $k(t)$ в тисячах осіб). Після п'ятого тижня кількість інфікованих людей лінійно зменшується і описується прямою пропорційністю.
- 1) Побудуйте графік функції залежності кількості хворих від t .
 - 2) Обчисліть, коли закінчиться хвиля грипу.
- 3.** Чи буде функція $f(x)$ неперервною в точці 3:
- 1) $f(x) = 3x - 5$;
 - 2) $g(x) = 2x + 7$;
 - 3) $f(x) = \frac{1}{x-3}$;
 - 4) $g(x) = \frac{1}{2-x}$?
- 4.** Складіть та розв'яжіть нерівність $f'(x) \geq 3$, якщо $f(x) = x^2$.
- 5.** Знайдіть значення виразу $f'(0) + f'(2)$ якщо $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 2, \\ 4x - 6, & x < 2. \end{cases}$
- 6.** Знайдіть тангенс кута, який утворює дотична до графіка функції $f(x) = x^3$ у точці з абсцисою $x_0 = -1$ з додатним напрямком осі абсцис.
- 7.** Доведіть, за означенням похідної, що функція $y = \sqrt[n]{x}$ не є диференційовною в точці $x_0 = 0$.
- 8.** Доведіть, користуючись означенням, що функція $y = \sqrt{1-x^2}$ не є диференційовною в точках $x_1 = -1$ і $x_2 = 1$. Проілюструйте отриманий результат графічно.

Рефлексія. Вправа «3–2–1»

- 1) Назви три нові відомості про похідні, які ти дізнався/дізналася на уроці.

.....

.....

.....

2) Запиши два запитання, які в тебе залишилися або виникли під час вивчення теми.

.....
.....
.....

3) Назви одну життєву ситуацію, в якій можна застосувати знання про похідну або неперервність функції.

.....
.....
.....

Можливі теми проєктів

- 1.** Дослідження неперервності та диференційовності функцій.
- 2.** Використання похідної функції у фізиці.
- 3.** Графіки похідних степеневих функцій та тригонометричних функцій синус і косинус.
- 4.** Похідна як інструмент аналізу економічних змін. Як дослідження похідної функції допомагає зрозуміти зростання (зменшення) цін на товари, зміни прибутку тощо?
- 5.** Використання похідної функції у медицині.







