

### Урок 8. Урок–практикум. Обчислення похідних лінійної, степеневі функцій та тригонометричних функцій (синус і косинус)

#### РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

#### I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) навчитеся обчислювати похідні функцій у заданих точках;
- 2) навчитеся знаходити похідну лінійної функції та пояснювати її зміст;
- 3) навчитеся знаходити похідну степеневі функції та розуміти її практичне значення;
- 4) навчитеся знаходити похідні тригонометричних функцій синуса і косинуса;
- 5) інтерпретуватимете похідну як швидкість зміни величини;
- 6) застосуєте похідну для розв'язання практичних і прикладних задач.

#### II. Повторення

1. Знайдіть похідну функції  $y = x^{-15}$ .
2. Нехай  $f(x) = 4 - x^2$ . Користуючись означенням похідної, знайдіть  $f'(x)$ .
3. Нехай  $f(x) = x^4\sqrt{x}$ . Обчисліть  $f'(x_0)$  у точці  $x_0 = 256$ .
4. Тіло рухається за законом  $s(t) = 5 - 4t$ , де  $s$  — шлях (м),  $t$  — час (с). Знайдіть миттєву швидкість у момент  $t = 10$  с. Поясніть отриманий результат.
5. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції  $f(x) = \cos x$  у точці  $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ .

### III. Обчислення похідних степеневих функцій

Повторимо формулу обчислення похідної степеневі функції:  $y' = n \cdot x^{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $x \neq 0$ .

Наприклад, скористаємось формулою для знаходження похідної функції  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

$$\text{Маємо } \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Отже, для будь-яких  $x \neq 0$  виконується рівність  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$  або  $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ .

**Приклад 1.** Продиференціюйте функцію  $f(x) = \sqrt{x}$ .

*Розв'язання.* Нехай  $x_0$  — довільна точка області визначення функції  $f$ , тобто  $x_0 \geq 0$ .

$$1) \Delta f = \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}.$$

$$2) \text{ Маємо: } \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{x_0 + \Delta x})^2 - (\sqrt{x_0})^2}{\Delta x \cdot (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} = \frac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta x \cdot (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}.$$

3) Знайдемо границю  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ . При  $x_0 > 0$  маємо, що

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

При  $x_0 = 0$  маємо, що  $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{\Delta x}}$ . Тому  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} = +\infty$ . Звідси випливає, що

функція  $f(x) = \sqrt{x}$  не є диференційовною в точці  $x_0 = 0$ .

Таким чином, функція  $f(x) = \sqrt{x}$  є диференційовною на множині  $(0; +\infty)$ , причому

$$f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

$$\text{Тоді } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\text{Відповідь. } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Формулу  $y' = n \cdot x^{n-1}$  можна узагальнити для будь-якого  $n \in \mathbb{Q}$  і  $x > 0$ .

Наприклад, знайдемо похідну функції  $f(x) = \sqrt{x}$  на множині  $(0; +\infty)$ . Маємо:

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Зазначимо, що при знаходженні похідної функції  $y = \sqrt[3]{x}$  не можна замінити її на функцію  $y = x^{\frac{1}{3}}$ , оскільки в цих функцій різні області визначення. Покажемо, як можна отримати формулу для знаходження похідної функції  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ .

$$\begin{aligned}
\text{Маємо } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x_0 + \Delta x} - \sqrt[3]{x_0}}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt[3]{x_0 + \Delta x} - \sqrt[3]{x_0}\right) \left(\left(\sqrt[3]{x_0 + \Delta x}\right)^2 + \sqrt[3]{x_0 + \Delta x} \sqrt[3]{x_0} + \left(\sqrt[3]{x_0}\right)^2\right)}{\Delta x \left(\left(\sqrt[3]{x_0 + \Delta x}\right)^2 + \sqrt[3]{x_0 + \Delta x} \sqrt[3]{x_0} + \left(\sqrt[3]{x_0}\right)^2\right)} = \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x \left(\left(\sqrt[3]{x_0 + \Delta x}\right)^2 + \sqrt[3]{x_0 + \Delta x} \sqrt[3]{x_0} + \left(\sqrt[3]{x_0}\right)^2\right)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x_0 + \Delta x}\right)^2 + \sqrt[3]{x_0 + \Delta x} \sqrt[3]{x_0} + \left(\sqrt[3]{x_0}\right)^2}.
\end{aligned}$$

Якщо  $x_0 = 0$ , то цієї границі не існує і функція  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  не диференційовна в точці  $x_0 = 0$ .

Якщо  $x_0 \neq 0$ , то можна записати

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x_0 + \Delta x}\right)^2 + \sqrt[3]{x_0 + \Delta x} \sqrt[3]{x_0} + \left(\sqrt[3]{x_0}\right)^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Отже, для будь-якого  $x \neq 0$  справедлива формула  $\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$

У загальному, похідну функції  $f(x) = \sqrt[n]{x}$ , де  $n \in N$ ,  $n > 1$ , можна знайти за формулою  $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}} \cdot h'(t) = gt$

Якщо  $n$  — непарне натуральне число, то формула дозволяє знаходити похідну функції  $f(x)$  у всіх точках  $x$  таких, що  $x \neq 0$ .

Якщо  $n$  — парне натуральне число, то формула дозволяє знаходити похідну функції  $f(x)$  для всіх додатних значень  $x$ .

## IV. Обчислення похідних тригонометричних функцій

Функції  $y = \sin x$  і  $y = \cos x$  є диференційовними, і їхні похідні знаходяться за формулами:  $(\sin x)' = \cos x$ ,  $(\cos x)' = -\sin x$ .

Раніше було розглянуто доведення першої формули. Розглянемо інший спосіб її доведення.

*Доведення.* Нехай  $f(x) = \sin x$ .

Для довільної точки  $x_0$  маємо:

$$1) \Delta f = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0;$$

$$2) \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x};$$

$$\begin{aligned}
3) f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \right).
\end{aligned}$$

Скориставшись першою чудовою границею  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$  і неперервністю функції

$$y = \cos x, \text{ можна записати: } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos x_0.$$

Отже, формулу  $(\sin x)' = \cos x$ .

**Приклад 2.** За означенням похідної обчисліть похідну функції  $f(x) = \sin 2x$ .

*Розв'язання.* Візьмемо довільне фіксоване значення аргументу  $x_0$  і надамо приросту  $x_0 + \Delta x$ . Знайдемо відповідне значення функції  $f(x_0 + \Delta x) = \sin 2(x_0 + \Delta x)$ .

Обчислимо приріст функції  $\Delta f(x_0)$ :

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0) &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sin 2(x_0 + \Delta x) - \sin 2x_0 = \\ &= 2 \sin \frac{2(x_0 + \Delta x) - 2x_0}{2} \cos \frac{2(x_0 + \Delta x) + 2x_0}{2} = 2 \sin \Delta x \cos(2x_0 + \Delta x). \end{aligned}$$

Складемо відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{2 \sin \Delta x \cos(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2 \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \cos(2x_0 + \Delta x).$$

Обчислимо похідну  $f'(x_0)$ , тобто знайдемо границю:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = 2 \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(2x_0 + \Delta x) = 2 \cdot 1 \cdot \cos 2x_0 = 2 \cos 2x_0.$$

Отже, для довільного значення аргументу  $(\sin 2x)' = 2 \cos 2x$ .

*Відповідь.*  $2 \cos 2x$ .

## V. Розв'язування практичної задачі

### Як я вирішую певну проблему?

**Задача.** Учень 11-го класу працює над шкільним проектом у сфері містобудування. Як один з об'єктів він обрав міст через річку. Йому потрібно точно визначити висоту мосту. Щоб це зробити, він кидає камінець вниз і фіксує час падіння до річки, — який становить приблизно 2,5 секунди. Висота падіння камінця описується функцією:

$$h(t) = \frac{g}{2} t^2, \text{ де: } h(t) \text{ — висота у метрах, } t \text{ — час падіння у секундах, } g = 9,8 \text{ м/с}^2 \text{ —}$$

прискорення вільного падіння.

- 1) Знайдіть похідну функції  $h(t)$  та поясніть її фізичний зміст у контексті задачі.
- 2) Обчисліть миттєву швидкість камінця в момент падіння через  $t = 2,5$  секунд.
- 3) Використовуючи формулу, обчисліть висоту мосту.

## VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

### Рівень А

**1.** Знайдіть похідну функції:

- |                   |                      |                        |                       |
|-------------------|----------------------|------------------------|-----------------------|
| 1) $f(x) = x^7$ ; | 2) $g(x) = \sin x$ ; | 3) $t(x) = x^9$ ;      | 4) $h(x) = x^{-4}$ ;  |
| 5) $m(x) = 5x$ ;  | 6) $f(x) = 3x^6$ ;   | 7) $g(x) = 2 \cos x$ ; | 8) $h(x) = 5x^{-3}$ . |

**2.** За означенням похідної обчисліть  $f'(x)$ :

1)  $f(x) = \frac{2x}{3x+1}$ ;

2)  $f(x) = x^3 + 2x + 3$ .

**3.** Розв'яжіть рівняння  $f'(x) = 0$ , якщо:

1)  $f(x) = \cos x$ ;

2)  $f(x) = \sin x$ .

**4.** Дано функції  $f(x) = 4 \cos x$  і  $g(x) = 2\sqrt{3}x + 9$ . Розв'яжіть рівняння  $f'(x) = g'(x)$ .

**5.** Дано функції  $f(x) = 2 \sin x$  і  $g(x) = x + 11$ . Розв'яжіть рівняння  $f'(x) = g'(x)$ .

**6.** Знайдіть похідну функції:

1)  $f(x) = \frac{1}{x^4}$ ;

2)  $f(x) = \frac{5}{x^6}$ ;

3)  $f(x) = \frac{1}{2x^8}$ ;

4)  $f(x) = \frac{3}{5x^{10}}$ ;

5)  $y = x^{\frac{1}{3}}$ ;

6)  $y = x^{\frac{3}{2}}$ ;

7)  $y = 5x^{\frac{2}{5}}$ ;

8)  $y = \frac{1}{2x^{\frac{2}{9}}}$ .

### Рівень В

**1.** Знайдіть похідну функції:

1)  $f(x) = 2x^3\sqrt{x}$ ;

2)  $f(x) = \frac{4}{x\sqrt{x}}$ ;

3)  $f(x) = \frac{2x^3}{\sqrt[3]{x}}$ ;

4)  $f(t) = \sqrt{t}\sqrt{t}$ .

**2.** Знайдіть похідну функції:

1)  $y = x^{-15}$ ;

2)  $y = x^{-17}$ ;

3)  $y = x^{-2,5}$ ;

4)  $y = x^{\frac{1}{5}}$ .

**3.** Дотична до графіка функції  $f(x)$  у точці з абсцисою  $x_0$  має кутовий коефіцієнт  $k$ . Знайдіть  $x_0$ :

1)  $f(x) = x^4, k = -32$ ; 2)  $f(x) = \sqrt[3]{x}, k = \frac{1}{27}$ ; 3)  $f(x) = \frac{1}{x^3}, k = -\frac{1}{27}$ ; 4)  $f(x) = \cos x, k = 1$ .

**4.** Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом  $s(t) = t^3$ . Знайдіть  $s'(2)$ . Який фізичний зміст має знайдена величина?

**5.** Доведіть, користуючись означенням, що функція  $y = \sqrt[3]{x^2}$  не є диференційовною в точці  $x_0$ .

**6.** Доведіть, користуючись означенням, що функція  $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$  є диференційовною в точці  $x_0 = 0$ . Проілюструйте отриманий результат графічно.

**7.** Доведіть, користуючись означенням, що функція  $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \geq 0, \\ x, & x < 0 \end{cases}$  є диференційовною в точці  $x_0 = 0$ .

**8.** Знайдіть такі числа  $k, b$ , що функція  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 3, \\ kx + b, & x > 3 \end{cases}$  є диференційовною в точці  $x_0 = 3$ .

**9.** Знайдіть такі числа  $k, b$ , що функція  $f(x) = \begin{cases} kx + b, & x \leq 2, \\ \frac{1}{x}, & x > 2 \end{cases}$  є диференційовною в точці  $x_0 = 2$ .

## Рівень С

1. Доведіть, користуючись означенням, що функція  $f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & x < 0, \\ 2x, & x \geq 0 \end{cases}$  не є диференційовною в точці  $x_0 = 0$ .
2. Доведіть, користуючись означенням, що функція  $y = |x - 2|$  не є диференційовною в точці  $x_0 = 2$ .
3. Доведіть, користуючись означенням, що функція  $y = \sqrt{-x^2}$  не є диференційовною в точці  $x_0 = 0$ . Проілюструйте отримаво результат графічно.
4. Доведіть, користуючись означенням, що функція  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  не є диференційовною в точці  $x_0 = 0$ .
5. Доведіть, користуючись означенням, що функція  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  є диференційовною в точці  $x_0 = 0$  і знайдіть  $f'(0)$ .
6. Доведіть, користуючись означенням, що функція  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  є диференційовною в точці  $x_0 = 0$  і знайдіть  $f'(0)$ .

## Рефлексія

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що .....
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що .....
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію .....
- 4) Найскладнішим для мене було .....
- 5) Тепер я впевнений/впевнена у своїй здатності .....
- 6) Найбільше мені сподобалося .....

### Можливі теми проєктів

1. Дослідження миттєвої швидкості за допомогою похідної: приклади для різних типів руху.
2. Обчислення та аналіз похідної лінійної функції як моделі сталого темпу зростання або спадання.
3. Похідна степеневої функції та її застосування у моделях біологічного або технічного зростання.
4. Похідні тригонометричних функцій у задачах гармонічних коливань.
5. Дослідження рівномірного та нерівномірного руху тіла за допомогою похідної.
6. Історичний аспект: внесок Лейбніца та Ньютона у розвиток поняття похідної.









