

Урок 8. Урок–практикум. Обчислення похідних лінійної, степеневої функцій та тригонометричних функцій (синус і косинус)

Тип уроку: застосування знань, умінь і навичок.

План уроку

1. Обчислення похідних функцій у точках.
2. Обчислення похідних лінійних функцій.
3. Обчислення похідних степеневих функцій.
4. Обчислення похідних тригонометричних функцій синус та косинус.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

визначає та усуває прогалини у власних математичних знаннях і вміннях у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 4.1.3–1 П];

використовує різні форми подання математичних об'єктів відповідно до специфіки проблемної ситуації [12 МАО 4.2.2–2 П];

обґрунтовано пояснює хід своїх міркувань, зважаючи на мету і учасників спілкування [12 МАО 4.3.2–2 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Перед початком вивчення теми запропонуйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Проводьте аналогії з раніше вивченим матеріалом.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям розв'язати кілька прикладів на повторення.
- 3) Сформулюйте (без розв'язання) практичну задачу. Запропонуйте учням/ученицям розв'язати її наприкінці уроку як групову активність.
- 4) Теорію подавайте стисло. Зразки можливого подання теорії наводяться. Доведення тверджень виконуйте рамках уроку або запропонуйте його учням/ученицям на домашнє опрацювання.
- 5) До кожного теоретичного твердження наведено ілюстративні приклади.

6) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.

7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Можливі теми для створення проєктів запропоновані.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1. Фахівець із кібербезпеки аналізує лінійну модель росту кількості спроб несанкціонованих доступів до корпоративної мережі. Функція росту є лінійною, оскільки атаки відбуваються із сталою швидкістю. Як фахівець може швидко визначити швидкість зміни кількості атак і налаштувати систему автоматичного блокування підозрілих запитів?

2. Команда VR-розробників створює шолом віртуальної реальності, який відслідковує рухи голови користувача. Повороти голови описуються тригонометричними функціями — синус і косинус. Щоб передати у VR-простір плавний і реалістичний поворот камери, система прогнозує, як зміниться положення голови через мить. Як це можна зроби за допомогою похідної?

3. Стартап створює пристрій для моніторингу рівня глюкози у людей, хворих на діабет у режимі реального часу. Рівень глюкози коливається за функцією, яка враховує декілька факторів: вживання їжі, стресу та фізичної активності. Щоб запобігти гіпоглікемії, пристрій має визначити як швидко падає рівень цукру в крові. Як за допомогою похідної можна визначити момент часу, коли швидкість зниження рівня цукру в крові стає небезпечною для людини?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Знайдіть похідну функції $y = x^{-15}$.

Відповідь. $-15x^{-16}$.

2. Нехай $f(x) = 4 - x^2$. Користуючись означенням похідної, знайдіть $f'(x)$.

Відповідь. $-2x$.

3. Нехай $f(x) = x^4\sqrt{x}$. Обчисліть $f'(x_0)$ у точці $x_0 = 256$.

Відповідь. 80.

4. Тіло рухається за законом $s(t) = 5 - 4t$, де s — шлях (м), t — час (с). Знайдіть миттєву швидкість у момент $t = 10$ с. Поясніть отриманий результат.

Відповідь. Тіло рівномірно рухається зі сталою швидкістю 4 м/с у зворотному напрямку.

5. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $f(x) = \cos x$ у точці

$$x_0 = -\frac{\pi}{2}.$$

Відповідь. 1.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Учень 11-го класу працює над шкільним проектом у сфері містобудування. Як один з об'єктів він обрав міст через річку. Йому потрібно точно визначити висоту мосту. Щоб це зробити, він кидає камінець вниз і фіксує час падіння до річки, — який становить приблизно 2,5 секунди. Висота падіння камінця описується функцією: $h(t) = \frac{g}{2}t^2$, де: $h(t)$ — висота у метрах, t — час падіння у секундах, $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ — прискорення вільного падіння.

- 1) Знайдіть похідну функції $h(t)$ та поясніть її фізичний зміст у контексті задачі.
- 2) Обчисліть миттєву швидкість камінця в момент падіння через $t = 2,5$ секунд.
- 3) Використовуючи формулу, обчисліть висоту мосту.

III. Обчислення похідних степеневих функцій

Повторимо формулу обчислення похідної степеневі функції: $y' = n \cdot x^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$, $x \neq 0$.

Наприклад, скористаємось формулою для знаходження похідної функції $f(x) = \frac{1}{x}$.

$$\text{Маємо } \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Отже, для будь-яких $x \neq 0$ виконується рівність $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ або $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

Ілюстративний приклад

6. Продиференціюйте функцію $f(x) = \sqrt{x}$.

Розв'язання. Нехай x_0 — довільна точка області визначення функції f , тобто $x_0 \geq 0$.

1) $\Delta f = \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}$.

2) Маємо:
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{x_0 + \Delta x})^2 - (\sqrt{x_0})^2}{\Delta x \cdot (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} = \frac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta x \cdot (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}.$$

3) Знайдемо границю $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$. При $x_0 > 0$ маємо, що

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

При $x_0 = 0$ маємо, що $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{\Delta x}}$. Тому $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} = +\infty$. Звідси випливає, що функція $f(x) = \sqrt{x}$ не є диференційовною в точці $x_0 = 0$.

Таким чином, функція $f(x) = \sqrt{x}$ є диференційовною на множині $(0; +\infty)$, причому

$$f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

Тоді $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Відповідь. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Формулу $y' = n \cdot x^{n-1}$ можна узагальнити для будь-якого $n \in \mathbb{Q}$ і $x > 0$.

Наприклад, знайдемо похідну функції $f(x) = \sqrt{x}$ на множині $(0; +\infty)$. Маємо:

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Зазначимо, що при знаходженні похідної функції $y = \sqrt[3]{x}$ не можна замінити її на функцію $y = x^{\frac{1}{3}}$, оскільки в цих функцій різні області визначення. Покажемо, як можна отримати формулу для знаходження похідної функції $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

$$\begin{aligned} \text{Маємо } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x_0 + \Delta x} - \sqrt[3]{x_0}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt[3]{x_0 + \Delta x} - \sqrt[3]{x_0}\right) \left(\left(\sqrt[3]{x_0 + \Delta x}\right)^2 + \sqrt[3]{x_0 + \Delta x} \sqrt[3]{x_0} + \left(\sqrt[3]{x_0}\right)^2\right)}{\Delta x \left(\left(\sqrt[3]{x_0 + \Delta x}\right)^2 \sqrt[3]{x_0 + \Delta x} \sqrt[3]{x_0} + \left(\sqrt[3]{x_0}\right)^2\right)} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x \left(\left(\sqrt[3]{x_0 + \Delta x}\right)^2 \sqrt[3]{x_0 + \Delta x} \sqrt[3]{x_0} + \left(\sqrt[3]{x_0}\right)^2\right)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x_0 + \Delta x}\right)^2 \sqrt[3]{x_0 + \Delta x} \sqrt[3]{x_0} + \left(\sqrt[3]{x_0}\right)^2}. \end{aligned}$$

Якщо $x_0 = 0$, то цієї границі не існує і функція $f(x) = \sqrt[3]{x}$ недиференційовна в точці $x_0 = 0$.

Якщо $x_0 \neq 0$, то можна записати

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x_0 + \Delta x}\right)^2 \sqrt[3]{x_0 + \Delta x} \sqrt[3]{x_0} + \left(\sqrt[3]{x_0}\right)^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Отже, для будь-якого $x \neq 0$ справедлива формула $\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

У загальному, похідну функції $f(x) = \sqrt[n]{x}$, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, можна знайти за формулою $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}} \cdot h'(t) = gt$

Якщо n — непарне натуральне число, то формула дозволяє знаходити похідну функції $f(x)$ у всіх точках x таких, що $x \neq 0$.

Якщо n — парне натуральне число, то формула дозволяє знаходити похідну функції $f(x)$ для всіх додатних значень x .

IV. Обчислення похідних тригонометричних функцій

Функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є диференційовними, і їхні похідні знаходяться за формулами: $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$.

Раніше було розглянуто доведення першої формули. Розглянемо інший спосіб її доведення.

Доведення. Нехай $f(x) = \sin x$.

Для довільної точки x_0 маємо:

$$1) \Delta f = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0;$$

$$2) \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x};$$

$$3) f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \right).$$

Скориставшись першою чудовою границею $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ і неперервністю функції

$$y = \cos x, \text{ можна записати: } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos x_0.$$

Отже, формулу $(\sin x)' = \cos x$.

Ілюстративний приклад

7. За означенням похідної обчисліть похідну функції $f(x) = \sin 2x$.

Розв'язання. Візьмемо довільне фіксоване значення аргументу x_0 і надамо приросту $x_0 + \Delta x$. Знайдемо відповідне значення функції $f(x_0 + \Delta x) = \sin 2(x_0 + \Delta x)$.

Обчислимо приріст функції $\Delta f(x_0)$:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sin 2(x_0 + \Delta x) - \sin 2x_0 =$$

$$= 2 \sin \frac{2(x_0 + \Delta x) - 2x_0}{2} \cos \frac{2(x_0 + \Delta x) + 2x_0}{2} = 2 \sin \Delta x \cos(2x_0 + \Delta x).$$

Складемо відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{2 \sin \Delta x \cos(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2 \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \cos(2x_0 + \Delta x).$$

Обчислимо похідну $f'(x_0)$, тобто знайдемо границю:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = 2 \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(2x_0 + \Delta x) = 2 \cdot 1 \cdot \cos 2x_0 = 2 \cos 2x_0.$$

Отже, для довільного значення аргументу $(\sin 2x)' = 2 \cos 2x$.

Відповідь. $2 \cos 2x$.

V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (8–10 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Учень 11-го класу працює над шкільним проектом у сфері містобудування. Як один з об'єктів він обрав міст через річку. Йому потрібно точно визначити висоту мосту. Щоб це зробити, він кидає камінець вниз і фіксує час падіння до річки, — який становить приблизно 2,5 секунди. Висота падіння камінця описується функцією: $h(t) = \frac{g}{2}t^2$, де: $h(t)$ — висота у метрах, t — час падіння у секундах, $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ — прискорення вільного падіння.

- 1) Знайдіть похідну функції $h(t)$ та поясніть її фізичний зміст у контексті задачі.
- 2) Обчисліть миттєву швидкість камінця в момент падіння через $t = 2,5$ секунд.
- 3) Використовуючи формулу, обчисліть висоту мосту.

Розв'язання. 1) Знайдемо похідну функції $h(t)$. Для цього використаємо формулу похідної степеневі функції: $h'(t) = \left(\frac{g}{2}t^2\right)' = \frac{g}{2} \cdot 2 \cdot t = gt$.

Похідна $h'(t)$ показує миттєву швидкість падіння камінця в будь-який момент часу t . Похідна є лінійною функцією. Тобто, чим більше часу проходить, тим більшою стає швидкість — бо камінь прискорюється під дією сили тяжіння.

- 2) Обчислимо миттєву швидкість при $t = 2,5$ с:

$$h'(2,5) = \frac{g}{2} \cdot 2 \cdot 2,5 = 24,5 \text{ (м/с)}.$$

Отже, камінь вдаряється об воду зі швидкістю 24,5 м/с.

- 3) Знайдемо висоту мосту.

$$h(2,5) = \frac{g}{2} \cdot (2,5)^2 = 30,625 \text{ (м)}.$$

Тобто міст має висоту приблизно 30,625 м.

- 4) Побудуємо графік функції $h(t) = \frac{g}{2}t^2$. Графіком є парабола, вітки якої направлені вгору.

Відповідь. $h'(t) = gt$; 24,5 м/с; 30,625 м.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

- 1.** Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = x^7$;	2) $g(x) = \sin x$;	3) $t(x) = x^9$;	4) $h(x) = x^{-4}$;
5) $m(x) = 5x$;	6) $f(x) = 3x^6$;	7) $g(x) = 2 \cos x$;	8) $h(x) = 5x^{-3}$.

- 2.** За означенням похідної обчисліть $f'(x)$:

1) $f(x) = \frac{2x}{3x+1}$;	2) $f(x) = x^3 + 2x + 3$.
-------------------------------	----------------------------

- 3.** Розв'яжіть рівняння $f'(x) = 0$, якщо:

1) $f(x) = \cos x$;	2) $f(x) = \sin x$.
----------------------	----------------------

4. Дано функції $f(x) = 4 \cos x$ і $g(x) = 2\sqrt{3}x + 9$. Розв'яжіть рівняння $f'(x) = g'(x)$.
5. Дано функції $f(x) = 2 \sin x$ і $g(x) = x + 11$. Розв'яжіть рівняння $f'(x) = g'(x)$.
6. Знайдіть похідну функції:

$$\begin{array}{llll} 1) f(x) = \frac{1}{x^4}; & 2) f(x) = \frac{5}{x^6}; & 3) f(x) = \frac{1}{2x^8}; & 4) f(x) = \frac{3}{5x^{10}}; \\ 5) y = x^{\frac{1}{3}}; & 6) y = x^{\frac{3}{2}}; & 7) y = 5x^{\frac{2}{5}}; & 8) y = \frac{1}{2x^{\frac{9}{2}}}. \end{array}$$

Рівень В

1. Знайдіть похідну функції:
- $$1) f(x) = 2x^3 \sqrt{x}; \quad 2) f(x) = \frac{4}{x\sqrt{x}}; \quad 3) f(x) = \frac{2x^3}{\sqrt[3]{x}}; \quad 4) f(t) = \sqrt{t}\sqrt{t}.$$
2. Знайдіть похідну функції:
- $$1) y = x^{-15}; \quad 2) y = x^{-17}; \quad 3) y = x^{-2.5}; \quad 4) y = x^{\frac{1}{5}}.$$
3. Дотична до графіка функції $f(x)$ у точці з абсцисою x_0 має кутовий коефіцієнт k . Знайдіть x_0 :
- $$1) f(x) = x^4, k = -32; \quad 2) f(x) = \sqrt[3]{x}, k = \frac{1}{27}; \quad 3) f(x) = \frac{1}{x^3}, k = -\frac{1}{27}; \quad 4) f(x) = \cos x, k = 1.$$
4. Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $s(t) = t^3$. Знайдіть $s'(2)$. Який фізичний зміст має знайдена величина?
5. Доведіть, користуючись означенням, що функція $y = \sqrt[3]{x^2}$ не є диференційовною в точці x_0 .
6. Доведіть, користуючись означенням, що функція $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ є диференційовною в точці $x_0 = 0$. Проілюструйте отриманий результат графічно.
7. Доведіть, користуючись означенням, що функція $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \geq 0, \\ x, & x < 0 \end{cases}$ є диференційовною в точці $x_0 = 0$.
8. Знайдіть такі числа k, b , що функція $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 3, \\ kx + b, & x > 3 \end{cases}$ є диференційовною в точці $x_0 = 3$.
9. Знайдіть такі числа k, b , що функція $f(x) = \begin{cases} kx + b, & x \leq 2, \\ \frac{1}{x}, & x > 2 \end{cases}$ є диференційовною в точці $x_0 = 2$.

Рівень С

1. Доведіть, користуючись означенням, що функція $f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & x < 0, \\ 2x, & x \geq 0 \end{cases}$ не є диференційовною в точці $x_0 = 0$.

2. Доведіть, користуючись означенням, що функція $y = |x - 2|$ не є диференційовною в точці $x_0 = 2$.
3. Доведіть, користуючись означенням, що функція $y = \sqrt{-x^2}$ не є диференційовною в точці $x_0 = 0$. Проілюструйте отримаво результат графічно.
4. Доведіть, користуючись означенням, що функція $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ не є диференційовною в точці $x_0 = 0$.
5. Доведіть, користуючись означенням, що функція $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ є диференційовною в точці $x_0 = 0$ і знайдіть $f'(0)$.
6. Доведіть, користуючись означенням, що функція $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ є диференційовною в точці $x_0 = 0$ і знайдіть $f'(0)$.

VII. Рефлексія (1–2 хв)

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
- 4) Найскладнішим для мене було
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
- 6) Найбільше мені сподобалося

Можливі теми проєктів

1. Дослідження миттєвої швидкості за допомогою похідної: приклади для різних типів руху.
2. Обчислення та аналіз похідної лінійної функції як моделі сталого темпу зростання або спадання.
3. Похідна степеневої функції та її застосування у моделях біологічного або технічного зростання.
4. Похідні тригонометричних функцій у задачах гармонічних коливань.
5. Дослідження рівномірного та нерівномірного руху тіла за допомогою похідної.
6. Історичний аспект: внесок Лейбніца та Ньютона у розвиток поняття похідної.