

Урок 9. Правила обчислення похідних

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

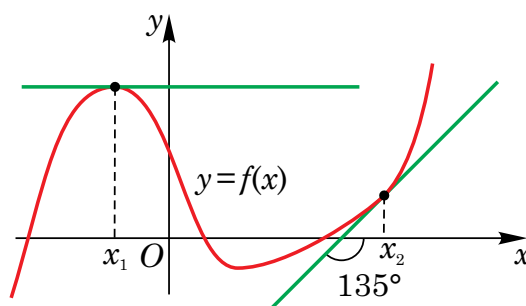
- 1) дізнаєтесь, що таке похідна суми, добутку, частки та тригонометричних функцій (тангенс, котангенс);
- 2) вивчите правила обчислення похідних різних функцій;
- 3) застосуєте набуті знання у письмових обчисленнях похідних;
- 4) застосуєте правила обчислення похідних у задачах з практичним змістом.

II. Повторення

1. Укажіть рівняння прямої, яка може бути дотичною до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$, якщо $f'(2) = -3$. (ЗНО, 2015 р.).

А	Б	В	Г	Д
$y = -1,5x + 1$	$y = 3x - 2$	$y = 2x + 3$	$y = 1,5x - 1$	$y = -3x + 2$

2. На рисунку зображений графік функції $y = f(x)$ та дотичні до нього в точках x_1 та x_2 . Користуючись геометричним змістом похідної, знайдіть $f'(x_1) + f'(x_2)$. (ЗНО, 2017 р.).



3. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = 6t^2$, де $x(t)$ — координата точки, t — час руху. За якою формулою визначають швидкість $v(t)$ цієї матеріальної точки в будь-який момент часу?

V. Похідна частки функцій

Теорема. Якщо функції f і g диференційовні в точці x_0 і функція g не дорівнює нулю в цій точці, то їхня частка $\frac{f}{g}$ також диференційовна в цій точці:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Доведення. Нехай x_0 — довільна точка, у якій функції f і g є диференційовними.

Знайдемо приріст функції $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ у точці x_0 .

Ураховуючи рівності $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f$, $g(x_0 + \Delta x) = g(x_0) + \Delta g$, маємо:

$$\Delta y = \frac{f(x_0 + \Delta x)}{g(x_0 + \Delta x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{g(x_0)f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0 + \Delta x)}{g(x_0)g(x_0 + \Delta x)}.$$

$$\text{Знайдемо відношення } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g(x_0) \frac{\Delta f(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} - f(x_0) \frac{\Delta g(x_0 + \Delta x)}{\Delta x}}{g(x_0) \cdot g(x_0 + \Delta x)}.$$

За умовою функція $g(x)$ не дорівнює нулю в точці x_0 , то функція $f(x)$ та $g(x)$ мають похідні в цій точці.

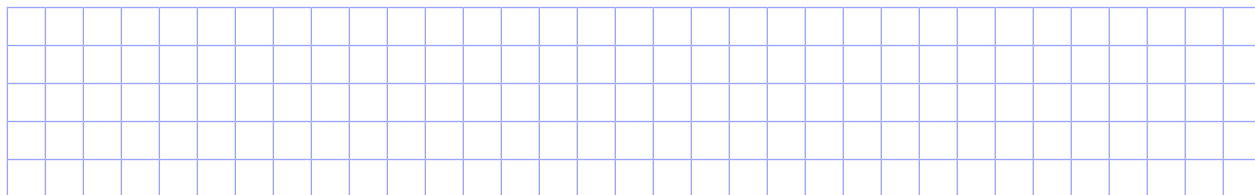
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = f'(x_0), \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = g'(x_0), \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x_0 + \Delta x) = g(x_0).$$

$$\text{Тому } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0) \cdot f'(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)} = \frac{g(x_0) \cdot f'(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Таким чином, функція $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ є диференційовною в точці x_0 , причому її похідна

$$\text{в цій точці: } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Приклад 5. Знайдіть похідну функції $y = \frac{2x}{1-3x}$.



VI. Похідні тригонометричних функцій тангенс і котангенс

Теорема. Функція тангенс має похідну в кожній точці своєї області визначення, яка дорівнює $\frac{1}{\cos^2 x}$, тобто $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Доведення. Використаємо формулу $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ і правило похідної частки:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Теорема. Функція котангенс має похідну в кожній точці своєї області визначення, яка дорівнює $-\frac{1}{\sin^2 x}$, тобто $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Доведення теореми аналогічне попередній теоремі.

VII. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. За допомогою фотосинтезу дерево перетворює вуглекислий газ на кисень, який виділяється в навколишнє середовище. Кількість виділеного кисню залежить зокрема від часу доби. Функція $V(t) = -1,1t^3 + 20t^2 + 10t$, де $V(t)$ — кількість виділеного кисню (в літрах), t — час (у годинах) моделює наближене значення об'єму кисню, який виділяється деревом до моменту часу t , впродовж дванадцяти годин денного періоду.

1. Чому формулу функції $V(t)$ доцільно використовувати лише в зазначеному інтервалі часу $0 \leq t \leq 12$?
2. Скільки літрів кисню виділяє дерево в навколишнє середовище впродовж усього періоду спостереження?
3. Обчисліть $V'(3)$ та $V'(10)$ та поясніть їхній зміст.

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Знайдіть похідну $f'(x)$, якщо:

1) $f(x) = x^3 + x^2$;

3) $f(x) = x^5 + x^4$;

5) $f(x) = x^7 + x^4 + x^2$;

2) $f(x) = x^4 + x^2$;

4) $f(x) = x^4 + 1$;

6) $f(x) = x^8 + x^3 + 5$.

2. Знайдіть $f'(x)$, якщо:

1) $f(x) = 3x^2$;

3) $f(x) = 0,5x^4$;

5) $f(x) = 0,5x^{-2}$;

2) $f(x) = 5x^3$;

4) $f(x) = -2x^7$;

6) $f(x) = -5x^{-3}$.

3. Знайдіть похідну функції $f(x)$:

1) $f(x) = 2x^3 + 5x^2$;

3) $f(x) = 2x^7 - 3x^4$;

5) $f(x) = -5x^4 - 4x^3 + x$;

2) $f(x) = 4x^5 - 3x$;

4) $f(x) = 0,35x^4 - x^3$;

6) $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 3$.

4. Знайдіть та виправіть помилки, які були допущені при знаходженні похідної:

- 1) $f(x) = x - \frac{1}{x}$, $f'(x) = 1 - x^{-2}$; 2) $f(x) = 1,5x^4 - 0,5x^3$, $f'(x) = 3x^3 - 1,5x^2$;
3) $f(x) = 4x^3 + 5x^2 - 3$, $f'(x) = 12x^2 + 10x - 3$; 4) $f(x) = -x^3 - 2 \cdot \frac{1}{x^2}$, $f'(x) = -3x^2 + \frac{4}{x}$.

5. Знайдіть значення похідної функції $f(x)$ у точці з абсцисою x_0 :

- 1) $f(x) = x^4$, $x_0 = 0,5$; 2) $f(x) = 2x^{-2}$, $x_0 = 3$;
3) $f(x) = 2x^3 - 3x^{-2}$, $x_0 = 2$; 4) $f(x) = 3x^{-2} + 4$, $x_0 = -2$.

6. Знайдіть похідну функції:

- 1) $y = 2x^5 - x$; 2) $y = x^7 - 4\sqrt{x}$; 3) $y = \sin x + 2 \cos x$;
4) $y = x - \frac{5}{x}$; 5) $y = 12 - \operatorname{ctg} x$; 6) $y = 0,4x^{-5} + \sqrt{3}$.

7. Знайдіть похідну функції:

- 1) $y = (x + 2)(x^2 - 4x + 5)$; 2) $y = (3x + 5)(2x^2 - 1)$; 3) $y = x^2 \sin x$;
4) $y = x \operatorname{ctg} x$; 5) $y = (2x + 1)\sqrt{x}$; 6) $y = \sqrt{x} \cos x$.

8. Знайдіть похідну функції:

- 1) $y = \frac{5}{3x - 2}$; 2) $y = \frac{x^3}{\cos x}$; 3) $y = \frac{3 - x^2}{4 + 2x}$; 4) $y = \frac{x^2 - 5x}{x - 7}$.

9. Матеріальна точка рухається за законом $s(t) = 2t^2 + 3t$, де s — відстань (у метрах), t — час (у секундах). Знайдіть значення t , при якому миттєва швидкість матеріальної точки становить 76 м/с.

10. Знайти похідну функції:

- 1) $y = -\frac{1}{6}x^3 + 0,5x^2 + 2x$; 2) $y = \operatorname{tg} x - 9x$;
3) $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{8} + 2$; 4) $y = 2x^{-2} + 3x - 3$.

Рівень В

1. Знайдіть похідну функції:

- 1) $f(x) = (3x^2 + 7)(2x - 5)$; 2) $f(x) = (5x^2 - 9)(3x + 4)$;
3) $f(x) = \sqrt{x}(3x^2 + 4x)$; 4) $f(x) = (3x - 5x^2)\sqrt{x}$.

2. Знайдіть похідну функції:

- 1) $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x + 2}$; 2) $g(x) = \frac{8x + x^2}{x - 1}$; 3) $f(x) = \frac{x^2 + 7}{x^8}$; 4) $g(x) = \frac{3 + x^3}{x^4}$.

3. Знайдіть похідну функції:

- 1) $y = \frac{x - 1}{x + 1}$; 2) $y = \frac{2x - 3}{4 - 5x}$; 3) $y = \frac{5}{3x - 2}$; 4) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$.

4. Обчисліть значення похідної функції $f(x)$ у точці x_0 :

- 1) $f(x) = \frac{2 - 3x}{x + 2}$, $x_0 = -3$; 2) $f(x) = (1 + 3x)\sqrt{x}$, $x_0 = 9$;
3) $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - 10\sqrt[5]{x}$, $x_0 = 1$; 4) $f(x) = x \sin x$, $x_0 = 0$.

5. Розв'яжіть нерівність $f'(x) > 0$, якщо:

1) $f(x) = x^4 - 2x^2$;

2) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x + 7$;

3) $f(x) = \frac{1}{2}x - \cos x$;

4) $f(x) = x + \operatorname{tg} x$.

6. Розв'яжіть рівняння $f'(x) = 0$, якщо:

1) $f(x) = 3x^2 + 2x^3 + 7$;

2) $f(x) = 9x^2 - x^3 + 8$;

3) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$;

4) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 19$.

7. Знайдіть похідну функції $t(x)$ у точці x_0 :

1) $t(x) = \frac{2 \sin x}{3 - \cos x}$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$;

2) $t(x) = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

8. Функція $f(x)$ у точці $x_0 = 5$ має похідну $f'(5) = -1$. Обчисліть значення функції $g(x) = f(x) \cdot x$ у точці x_0 , якщо $f(5) = 3$. (ЗНО, 2012 р.).

9. Розв'яжіть нерівність $f'(x) \leq 0$.

1) $f(x) = \frac{2x+5}{x+2}$;

2) $f(x) = \frac{x^2+8}{x-1}$;

3) $f(x) = (x-2)(x+3)$;

4) $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Рівень С

1. Тіло масою 2 кг рухається по координатній прямій за законом $s(t) = 3t^2 - 4t + 2$, де $s(t)$ — переміщення (у метрах), t — час (у секундах). Знайдіть кінетичну енергію $E(t) = \frac{mv^2(t)}{2}$ тіла в момент часу $t_0 = 4$ с.

2. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t$, де $s(t)$ — переміщення (у метрах), t — час (у секундах). Визначте прискорення руху тіла в момент $t = 10$ с.

3. Розв'яжіть рівняння $g'(x) = 0$, якщо:

1) $g(x) = \frac{3-x^2}{x+2}$;

2) $g(x) = \frac{5+x^2}{2-x}$;

3) $g(x) = \frac{1}{x} + 4x - 7$;

4) $g(x) = 9x + \frac{1}{x} + 3$.

4. Матеріальна точка з масою 4 кг рухається по координатній прямій за законом $s(t) = t^2 + 4$ (переміщення вимірюється в метрах, час — у секундах). Знайдіть імпульс $p(t) = mv(t)$ матеріальної точки в момент часу $t_0 = 2$ с.

5. Тіло рухається по координатній прямій за законом $s(t) = 2t^2 - 8t + 15$ (переміщення вимірюється в метрах, час — у секундах). Визначте координату тіла в момент часу, коли його кінетична енергія дорівнює нулю.

6. Дано $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$. Доведіть, що $f'(x) > 0$ для всіх допустимих значень x .

7. У точках $x_1 = -1$ і $x_2 = 2$ знайдіть похідні функції:

1) $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$;

2) $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$.

8. При яких значеннях x правильна рівність $(y')^2 + y^2 = 1$?

1) $y = 1 - \sin x$;

2) $y = \sin x + \cos x$.

9. Розв'яжіть нерівність $f'(x) < 0$, якщо:

$$1) f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x;$$

$$2) f(x) = 12x - x^3.$$

10. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0, \text{ якщо } f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 18x, g(x) = 2\sqrt{x};$$

$$2) f'(x)g'(x) = 0, \text{ якщо } f(x) = x^3 - 6x^2, g(x) = \frac{\sqrt{x}}{3}.$$

Рефлексія

- 1) Сьогодні я навчився/навчилася
- 2) Тепер я вмію
- 3) Найбільше мене здивувало
- 4) Мені було складно, коли
- 5) Я зможу застосувати здобуті знання у
- 6) Я хочу зрозуміти, як

Можливі теми проєктів

- 1.** Похідні в економіці: як моделювати прибуток, витрати та дохід.
- 2.** Аналіз рівня шуму в місті протягом доби: побудова функції та обчислення похідної.
- 3.** Кисень і фотосинтез: дослідження процесу виділення кисню деревами за допомогою похідної.
- 4.** Похідні тригонометричних функцій у моделюванні хвиль і коливань.
- 5.** Побудова графіка «ідеального графіка серцебиття»: як похідна показує норму і відхилення роботи серця.







