

Урок 9. Правила обчислення похідних

Тип уроку: урок засвоєння нових знань.

План уроку

1. Похідна суми функцій.
2. Похідна добутку функцій.
3. Наслідок з теореми про добуток.
4. Похідна частки функцій.
5. Похідні тригонометричних функцій (тангенс та котангенс).

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

визначає необхідність і достатність набору даних проблемної ситуації та математичних фактів для її розв'язання [12 МАО 3.1.1–2 П];

самостійно або у співпраці з іншими визначає суттєві дані в специфічній проблемній ситуації, їхню достовірність [12 МАО 3.1.1–1 П];

оцінює обґрунтованість математичного розв'язання в контексті реальної комплексної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.3–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Доведення теорем пропонуйте учням/ученицям на власний розсуд. Можна лише довести теорему обчислення похідної суми функцій.
- 6) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.

- 7) Заплануйте розв'язання практичної задачі як групову активність. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп.
- 8) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці.
- 9) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Створення проектів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.
- 10) Можливі теми для створення проектів запропоновані. Також темами проектів можуть бути запропоновані вами практичні завдання за рівнями складності В або С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проекту вони можуть обрати рівень В або рівень С.
- 11) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2–3 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Data Scientist налаштовує модель прогнозування прибутку для онлайн-платформи. Загальний прогноз складається з двох частин: доходу від реклами та доходу від підписок. Обидві функції змінюються з часом по-різному. Щоб оптимізувати рекламну стратегію, потрібно швидко визначити, як змінюється загальний прогнозований дохід у конкретний момент часу. Як це можна зробити, якщо необхідно знайти похідну суми цих функцій?
- 2) Мережевий інженер аналізує швидкість інтернету. Пропускна здатність каналу визначається як відношення обсягу переданих даних до часу передачі. Обидві величини залежать від навантаження в мережі. Як можна оцінити зміну пропускну здатності у пікові години?
- 3) Інженер працює над проектом «розумного міста». Споживання електроенергії залежить одночасно від кількості активних пристроїв і часу їхньої роботи. Загальне споживання моделюється як добуток цих функцій. Як спрогнозувати навантаження на електромережу за допомогою похідної?

II. Повторення (3–4 хв)

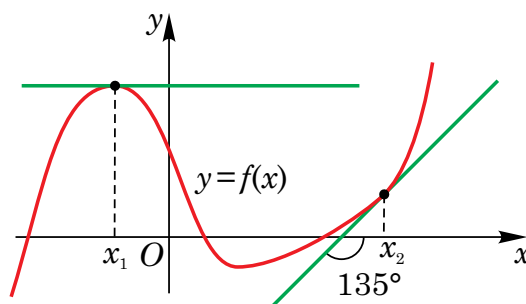
1. Укажіть рівняння прямої, яка може бути дотичною до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$, якщо $f'(2) = -3$. (ЗНО, 2015 р.).

А	Б	В	Г	Д
$y = -1,5x + 1$	$y = 3x - 2$	$y = 2x + 3$	$y = 1,5x - 1$	$y = -3x + 2$

Відповідь. Д.

2. На рисунку зображений графік функції $y = f(x)$ та дотичні до нього в точках x_1 та x_2 . Користуючись геометричним змістом похідної, знайдіть $f'(x_1) + f'(x_2)$. (ЗНО, 2017 р.).

Відповідь. 1.



3. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = 6t^2$, де $x(t)$ — координата точки, t — час руху. За якою формулою визначають швидкість $v(t)$ цієї матеріальної точки в будь-який момент часу t ?

Відповідь. $v(t) = 12t$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. За допомогою фотосинтезу дерево перетворює вуглекислий газ на кисень, який виділяється в навколишнє середовище. Кількість виділеного кисню залежить зокрема від часу доби. Функція $V(t) = -1,1t^3 + 20t^2 + 10t$, де $V(t)$ — кількість виділеного кисню (в літрах), t — час (у годинах) моделює наближене значення об'єму кисню, який виділяється деревом до моменту часу t , впродовж дванадцяти годин денного періоду.

1. Чому формулу функції $V(t)$ доцільно використовувати лише в зазначеному інтервалі часу $0 \leq t \leq 12$?
2. Скільки літрів кисню виділяє дерево в навколишнє середовище впродовж усього періоду спостереження?
3. Обчисліть $V'(3)$ та $V'(10)$ та поясніть їхній зміст.

III. Похідна суми функцій

Значення функцій $f(x)$ та $g(x)$ та їхні похідні у точці x_0 позначимо так:

$$f(x_0) = f, g(x_0) = g, f'(x_0) = f', g'(x_0) = g'.$$

Теорема. Якщо функції f і g диференційовні в точках x_0 , то їхня сума диференційовна в цій точці: $(f + g)' = f' + g'$. Тобто похідна суми дорівнює сумі похідних.

Доведення. Обчислимо приріст суми функцій у точці x_0 :

$$\Delta(f + g) = f(x_0 + \Delta x) + g(x_0 + \Delta x) - (f(x_0) + g(x_0)) = (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) + (g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)) = \Delta f + \Delta g.$$

$$\text{Запишемо } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f + \Delta g}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x} \right).$$

Оскільки функції f і g є диференційовними в точці x_0 , то існують границі $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$

і $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}$. Звідси отримаємо:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Отже, функція $y = f(x) + g(x)$ є диференційовною в точці x_0 , причому її похідна в цій точці дорівнює $f'(x) + g'(x)$.

Ілюстративні приклади

4. Знайдіть похідну функції $y = x^{10} - x^5 + x - 10$.

Розв'язання. Похідну функції $y = x^{10} - x^5 + x - 10$ знайдемо за правилом обчислення похідної суми функцій та формулою похідної степеневі функції:

$$y' = (x^{10} - x^5 + x - 10)' = (x^{10})' - (x^5)' + x' - 10' = 10x^9 - 5x^4 + 1.$$

Відповідь. $10x^9 - 5x^4 + 1$.

5. Знайдіть похідну функції $y = \sqrt[5]{x^7} - \sqrt[3]{x}$.

Розв'язання. Запишемо формулу, що задає функцію, у такому вигляді: $y = x^{\frac{7}{5}} - x^{\frac{1}{3}}$.

Знайдемо похідну різниці степеневих функцій:

$$y' = \frac{7}{5} \cdot x^{\frac{2}{5}} - \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{7}{5} \cdot \sqrt[5]{x^2} - \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}.$$

Відповідь. $\frac{7}{5} \cdot \sqrt[5]{x^2} - \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}.$

IV. Похідна добутку функцій

Теорема. Якщо функції f і g диференційовні в точці x_0 , то їхній добуток диференційовний у цій точці й обчислюється за правилом: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$.

Доведення. Нехай x_0 — довільна точка, у якій функції f і g є диференційовними. Знайдемо приріст функції $y = f(x) \cdot g(x)$ у точці x_0 . Ураховуючи рівності $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f$, $g(x_0 + \Delta x) = g(x_0) + \Delta g$, маємо:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \cdot g(x_0) = (f(x_0) + \Delta f) \cdot (g(x_0) + \Delta g) - f(x_0) \cdot g(x_0) = f(x_0) \cdot g(x_0) + \Delta f \cdot g(x_0) + \Delta g \cdot f(x_0) + \Delta f \cdot \Delta g - f(x_0) \cdot g(x_0) = \Delta f \cdot g(x_0) + \Delta g \cdot f(x_0) + \Delta f \cdot \Delta g.$$

$$\begin{aligned} \text{Запишемо } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f \cdot g(x_0) + \Delta g \cdot f(x_0) + \Delta f \cdot \Delta g}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x_0) + \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot f(x_0) + \frac{\Delta f \cdot \Delta g}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x_0) + \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot f(x_0) + \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot \Delta x \right). \end{aligned}$$

Оскільки функції f і g є диференційовними в точці x_0 , то існують границі $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ і

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}$. Тепер можна записати:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x_0) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot f(x_0) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = \\ &= f'(x_0) \cdot g(x_0) + g'(x_0) \cdot f(x_0) + f'(x_0) \cdot g'(x_0) \cdot 0 = f'(x_0) \cdot g(x_0) + g'(x_0) \cdot f(x_0). \end{aligned}$$

Таким чином, функція $y = f(x) \cdot g(x)$ є диференційовною в точці x_0 , причому її похідна в цій точці: $y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Наслідок з теореми про добуток. Якщо функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0 , а C — число (константа), то функція $C \cdot f(x)$ диференційовна в цій точці: $(Cf(x))' = C \cdot f'(x)$.

Отже, число можна виносити за знак похідної.

Доведення. Оскільки функція $y = C$ диференційовна в будь-якій точці, то, застосовуючи теорему про похідну добутку, можна записати: $(C \cdot f)' = (C)' \cdot f + C \cdot (f)' = 0 \cdot f + C \cdot (f)' = C \cdot f'$.

Ілюстративні приклади

- 6.** Розв'яжіть рівняння $f'(x) = 0$, якщо $f(x) = \frac{x^3}{3} - 1,5x^2 - 4x$.

Розв'язання. Обчислимо похідну функції за правилом обчислення похідної суми

$$\begin{aligned} \text{функції: } f'(x) &= \left(\frac{x^3}{3} - 1,5x^2 - 4x \right)' = \frac{1}{3} \cdot (x^3)' - 1,5 \cdot (x^2)' - 4(x)' = \\ &= \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 1,5 \cdot 2x - 4 = x^2 - 3x - 4. \end{aligned}$$

Прирівнюємо похідну функції до нуля та розв'яжемо квадратне рівняння:

$$x^2 - 3x - 4 = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 4.$$

Відповідь. $-1; 4$.

- 7.** Знайдіть похідну функції $f(x) = (x-4)\sqrt{x}$.

Розв'язання. Використаємо формулу похідної добутку функцій:

$$f'(x) = (x-4)' \sqrt{x} + (x-4) (\sqrt{x})' = \sqrt{x} + \frac{x-4}{2\sqrt{x}}.$$

$$\text{Відповідь. } \sqrt{x} + \frac{x-4}{2\sqrt{x}}.$$

V. Похідна частки функцій

Теорема. Якщо функції f і g диференційовні в точці x_0 і функція g не дорівнює нулю в цій точці, то їхня частка $\frac{f}{g}$ також диференційовна в цій точці:

$$\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Доведення. Нехай x_0 — довільна точка, у якій функції f і g є диференційовними.

Знайдемо приріст функції $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ у точці x_0 .

Ураховуючи рівності $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f$, $g(x_0 + \Delta x) = g(x_0) + \Delta g$, маємо:

$$\Delta y = \frac{f(x_0 + \Delta x)}{g(x_0 + \Delta x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{g(x_0)f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0 + \Delta x)}{g(x_0)g(x_0 + \Delta x)}.$$

$$\text{Знайдемо відношення } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g(x_0) \frac{\Delta f(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} - f(x_0) \frac{\Delta g(x_0 + \Delta x)}{\Delta x}}{g(x_0) \cdot g(x_0 + \Delta x)}.$$

За умовою функція $g(x)$ не дорівнює нулю в точці x_0 , то функція $f(x)$ та $g(x)$ мають похідні в цій точці.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = f'(x_0), \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = g'(x_0), \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x_0 + \Delta x) = g(x_0).$$

$$\text{Тому } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0) \cdot f'(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)} = \frac{g(x_0) \cdot f'(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Таким чином, функція $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ є диференційовною в точці x_0 , причому її похідна в цій точці: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Ілюстративний приклад

8. Знайдіть похідну функції $y = \frac{2x}{1-3x}$.

Розв'язання. Оскільки функція $y = \frac{2x}{1-3x}$ є дробово-раціональною, то застосуємо формулу похідної частки:

$$y' = \frac{(2x)' \cdot (1-3x) - 2x \cdot (1-3x)'}{(1-3x)^2} = \frac{2(1-3x) - 2x \cdot (-3)}{(1-3x)^2} = \frac{2-6x+6x}{(1-3x)^2} = \frac{2}{(1-3x)^2}.$$

Відповідь. $\frac{2}{(1-3x)^2}$.

VI. Похідні тригонометричних функцій тангенс і котангенс

Теорема. Функція тангенс має похідну в кожній точці своєї області визначення, яка дорівнює $\frac{1}{\cos^2 x}$, тобто $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Доведення. Використаємо формулу $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ і правило похідної частки:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Теорема. Функція котангенс має похідну в кожній точці своєї області визначення, яка дорівнює $-\frac{1}{\sin^2 x}$, тобто $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Доведення теореми аналогічне попередній теоремі.

VII. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (7–8 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. За допомогою фотосинтезу дерево перетворює вуглекислий газ на кисень, який виділяється в навколишнє середовище. Кількість виділеного кисню залежить зокрема від часу доби. Функція $V(t) = -1,1t^3 + 20t^2 + 10t$, де $V(t)$ — кількість виділеного кисню (в літрах), t — час (у годинах) моделює наближене значення об'єму кисню, який виділяється деревом до моменту часу t , впродовж дванадцяти годин денного періоду.

1. Чому формулу функції $V(t)$ доцільно використовувати лише в зазначеному інтервалі часу $0 \leq t \leq 12$?
2. Скільки літрів кисню виділяє дерево в навколишнє середовище впродовж усього періоду спостереження?
3. Обчисліть $V'(3)$ та $V'(10)$ та поясніть їхній зміст.

Розв'язання.

1. Функція $V(t) = -1,1t^3 + 20t^2 + 10t$ описує загальну кількість кисню, виділену деревом під час денного періоду, тривалістю 12 годин. Доцільність використання формули обмежена цим інтервалом, бо вночі фотосинтез не відбувається.

2. Знайдемо $V(12)$:

$$V(12) = -1,1 \cdot 12^3 + 20 \cdot 12^2 + 10 \cdot 12 = -1,1 \cdot 1728 + 20 \cdot 144 + 120 = -1900,8 + 2880 + 120 = 1099,2 \text{ (л)}.$$

Отже, за 12 годин дерево виділяє приблизно 1099,2 літра кисню.

3. Знайдемо похідну функції $V(t)$:

$$V'(t) = (-1,1t^3 + 20t^2 + 10t)' = -3,3t^2 + 40t + 10.$$

$$\text{Обчислимо: } V'(3) = -3,3 \cdot 9 + 40 \cdot 3 + 10 = -29,7 + 120 + 10 = 100,3 \text{ (л/год)}.$$

$$V'(10) = -3,3 \cdot 100 + 400 + 10 = -330 + 410 = 80 \text{ (л/год)}.$$

Отже, $V'(t)$ — швидкість виділення кисню в момент часу t , тобто літрів на годину.

$V'(3) = 100,3$ — на 3-й годині дерево виділяє приблизно 100,3 л/год.

$V'(10) = 80$ — на 10-й годині — 80 л/год.

Відповідь. 2. 1099,2 л. 3. 100,3 л/год, 80 л/год.

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Знайдіть похідну $f'(x)$, якщо:

$$1) f(x) = x^3 + x^2;$$

$$2) f(x) = x^4 + x^2;$$

$$3) f(x) = x^5 + x^4;$$

$$4) f(x) = x^4 + 1;$$

$$5) f(x) = x^7 + x^4 + x^2;$$

$$6) f(x) = x^8 + x^3 + 5.$$

2. Знайдіть $f'(x)$, якщо:

$$1) f(x) = 3x^2;$$

$$2) f(x) = 5x^3;$$

$$3) f(x) = 0,5x^4;$$

$$4) f(x) = -2x^7;$$

$$5) f(x) = 0,5x^{-2};$$

$$6) f(x) = -5x^{-3}.$$

3. Знайдіть похідну функції $f(x)$:

$$1) f(x) = 2x^3 + 5x^2;$$

$$2) f(x) = 4x^5 - 3x;$$

$$3) f(x) = 2x^7 - 3x^4;$$

$$4) f(x) = 0,35x^4 - x^3;$$

$$5) f(x) = -5x^4 - 4x^3 + x;$$

$$6) f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 3.$$

4. Знайдіть та виправіть помилки, які були допущені при знаходженні похідної:

$$1) f(x) = x - \frac{1}{x}, f'(x) = 1 - x^2;$$

$$2) f(x) = 1,5x^4 - 0,5x^3, f'(x) = 3x^3 - 1,5x^2;$$

$$3) f(x) = 4x^3 + 5x^2 - 3, f'(x) = 12x^2 + 10x - 3;$$

$$4) f(x) = -x^3 - 2 \cdot \frac{1}{x^2}, f'(x) = -3x^2 + \frac{4}{x}.$$

- 5.** Знайдіть значення похідної функції $f(x)$ у точці з абсцисою x_0 :
- 1) $f(x) = x^4$, $x_0 = 0,5$; 2) $f(x) = 2x^{-2}$, $x_0 = 3$;
 - 3) $f(x) = 2x^3 - 3x^{-2}$, $x_0 = 2$; 4) $f(x) = 3x^{-2} + 4$, $x_0 = -2$.
- 6.** Знайдіть похідну функції:
- 1) $y = 2x^5 - x$; 2) $y = x^7 - 4\sqrt{x}$; 3) $y = \sin x + 2 \cos x$;
 - 4) $y = x - \frac{5}{x}$; 5) $y = 12 - \operatorname{ctg} x$; 6) $y = 0,4x^{-5} + \sqrt{3}$.
- 7.** Знайдіть похідну функції:
- 1) $y = (x + 2)(x^2 - 4x + 5)$; 2) $y = (3x + 5)(2x^2 - 1)$; 3) $y = x^2 \sin x$;
 - 4) $y = x \operatorname{ctg} x$; 5) $y = (2x + 1)\sqrt{x}$; 6) $y = \sqrt{x} \cos x$.
- 8.** Знайдіть похідну функції:
- 1) $y = \frac{5}{3x - 2}$; 2) $y = \frac{x^3}{\cos x}$; 3) $y = \frac{3 - x^2}{4 + 2x}$; 4) $y = \frac{x^2 - 5x}{x - 7}$.
- 9.** Матеріальна точка рухається за законом $s(t) = 2t^2 + 3t$, де s — відстань (у метрах), t — час (у секундах). Знайдіть значення t , при якому миттєва швидкість матеріальної точки становить 76 м/с.
- 10.** Знайти похідну функції:
- 1) $y = -\frac{1}{6}x^3 + 0,5x^2 + 2x$; 2) $y = \operatorname{tg} x - 9x$;
 - 3) $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{8} + 2$; 4) $y = 2x^2 + 3x - 3$.

Рівень В

- 1.** Знайдіть похідну функції:
- 1) $f(x) = (3x^2 + 7)(2x - 5)$; 2) $f(x) = (5x^2 - 9)(3x + 4)$;
 - 3) $f(x) = \sqrt{x}(3x^2 + 4x)$; 4) $f(x) = (3x - 5x^2)\sqrt{x}$.
- 2.** Знайдіть похідну функції:
- 1) $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x + 2}$; 2) $g(x) = \frac{8x + x^2}{x - 1}$; 3) $f(x) = \frac{x^2 + 7}{x^8}$; 4) $g(x) = \frac{3 + x^3}{x^4}$.
- 3.** Знайдіть похідну функції:
- 1) $y = \frac{x - 1}{x + 1}$; 2) $y = \frac{2x - 3}{4 - 5x}$; 3) $y = \frac{5}{3x - 2}$; 4) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$.
- 4.** Обчисліть значення похідної функції $f(x)$ у точці x_0 :
- 1) $f(x) = \frac{2 - 3x}{x + 2}$, $x_0 = -3$; 2) $f(x) = (1 + 3x)\sqrt{x}$, $x_0 = 9$;
 - 3) $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - 10\sqrt[5]{x}$, $x_0 = 1$; 4) $f(x) = x \sin x$, $x_0 = 0$.
- 5.** Розв'яжіть нерівність $f'(x) > 0$, якщо:
- 1) $f(x) = x^4 - 2x^2$; 2) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x + 7$;
 - 3) $f(x) = \frac{1}{2}x - \cos x$; 4) $f(x) = x + \operatorname{tg} x$.

- 6.** Розв'яжіть рівняння $f'(x) = 0$, якщо:
- 1) $f(x) = 3x^2 + 2x^3 + 7$;
 - 2) $f(x) = 9x^2 - x^3 + 8$;
 - 3) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$;
 - 4) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 19$.
- 7.** Знайдіть похідну функції $t(x)$ у точці x_0 :
- 1) $t(x) = \frac{2 \sin x}{3 - \cos x}$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$;
 - 2) $t(x) = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$.
- 8.** Функція $f(x)$ у точці $x_0 = 5$ має похідну $f'(5) = -1$. Обчисліть значення функції $g(x) = f(x) \cdot x$ у точці x_0 , якщо $f(5) = 3$. (ЗНО, 2012 р.).
- 9.** Розв'яжіть нерівність $f'(x) \leq 0$.
- 1) $f(x) = \frac{2x+5}{x+2}$;
 - 2) $f(x) = \frac{x^2+8}{x-1}$;
 - 3) $f(x) = (x-2)(x+3)$;
 - 4) $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Рівень С

- 1.** Тіло масою 2 кг рухається по координатній прямій за законом $s(t) = 3t^2 - 4t + 2$, де $s(t)$ — переміщення (у метрах), t — час (у секундах). Знайдіть кінетичну енергію $E(t) = \frac{mv^2(t)}{2}$ тіла в момент часу $t_0 = 4$ с.
- 2.** Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t$, де $s(t)$ — переміщення (у метрах), t — час (у секундах). Визначте прискорення руху тіла в момент $t = 10$ с.
- 3.** Розв'яжіть рівняння $g'(x) = 0$, якщо:
- 1) $g(x) = \frac{3-x^2}{x+2}$;
 - 2) $g(x) = \frac{5+x^2}{2-x}$;
 - 3) $g(x) = \frac{1}{x} + 4x - 7$;
 - 4) $g(x) = 9x + \frac{1}{x} + 3$.
- 4.** Матеріальна точка з масою 4 кг рухається по координатній прямій за законом $s(t) = t^2 + 4$ (переміщення вимірюється в метрах, час — у секундах). Знайдіть імпульс $p(t) = mv(t)$ матеріальної точки в момент часу $t_0 = 2$ с.
- 5.** Тіло рухається по координатній прямій за законом $s(t) = 2t^2 - 8t + 15$ (переміщення вимірюється в метрах, час — у секундах). Визначте координату тіла в момент часу, коли його кінетична енергія дорівнює нулю.
- 6.** Дано $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$. Доведіть, що $f'(x) > 0$ для всіх допустимих значень x .
- 7.** У точках $x_1 = -1$ і $x_2 = 2$ знайдіть похідні функції:
- 1) $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$;
 - 2) $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$.
- 8.** При яких значеннях x правильна рівність $(y')^2 + y^2 = 1$?
- 1) $y = 1 - \sin x$;
 - 2) $y = \sin x + \cos x$.
- 9.** Розв'яжіть нерівність $f'(x) < 0$, якщо:
- 1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$;
 - 2) $f(x) = 12x - x^3$.

10. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$, якщо $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 18x$, $g(x) = 2\sqrt{x}$;

2) $f'(x)g'(x) = 0$, якщо $f(x) = x^3 - 6x^2$, $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{3}$.

IX. Рефлексія (1–2 хв)

1) Сьогодні я навчився/навчилася

2) Тепер я вмію

3) Найбільше мене здивувало

4) Мені було складно, коли

5) Я зможу застосувати здобуті знання у

6) Я хочу зрозуміти, як

Можливі теми проєктів

1. Похідні в економіці: як моделювати прибуток, витрати та дохід.
2. Аналіз рівня шуму в місті протягом доби: побудова функції та обчислення похідної.
3. Кисень і фотосинтез: дослідження процесу виділення кисню деревами за допомогою похідної.
4. Похідні тригонометричних функцій у моделюванні хвиль і коливань.
5. Побудова графіка «ідеального графіка серцебиття»: як похідна показує норму і відхилення роботи серця.

Список використаної літератури

- 1) Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра: підручник для 11 кл. з поглибленим вивченням математики: у 2 ч.— Х. : Гімназія, 2011. — Ч. 1. — 256 с. : іл.
- 2) Шкіль М. І., Слєпкань З. І., Дубинчук О. С. Алгебра і початки аналізу: підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів. — К. : Зодіак-ЕКО, 2007. — 384 с.